例題と演習で学ぶ　微分積分学　演習問題解答
(第 6 刷にも対応)

第 1 章

1.1.

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ とおくと, $f(-2) = 0$ より, $f(x)$ は $x + 2$ で割り切れる. $f(x)$ を $x + 2$ で割ることで,

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x^2 + x + 3)$$

を得る.

(2) $f(x) = x^3 - 19x - 30$ とおくと, $f(-2) = 0$ より, $f(x)$ は $x + 2$ で割り切れる. $f(x)$ を $x + 2$ で割ることで,

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x^2 - 2x - 15)$$

を得る. これは, さらに次のように因数分解ができる.

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x^2 - 2x - 15) = (x + 2)(x + 3)(x - 5)$$

(3) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

1.2.

(1) $(x^2 + 3x - 1) \div (x + 1) = x + 2$ 余り -3 より,

$$x^2 + 3x - 1 = (x + 1)(x + 2) - 3$$

両辺を $\dfrac{1}{x+1}$ 倍すると

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} = x + 2 - \frac{3}{x + 1}$$

(2) $(x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 2) \div (x^2 + x + 1) = x^2 + x - 1$ 余り $-5x + 3$ より,

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) - 5x + 3$$

両辺を $\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ 倍すると

$$\frac{x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 2}{x^2 + x + 1} = x^2 + x - 1 - \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$$

(3) $(3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 2) \div (2x^2 - 1) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{4}$ 余り $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ より,

$$3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 2 = (2x^2 - 1)\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

両辺を $\dfrac{1}{2x^2 - 1}$ 倍すると,

$$\frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 2}{2x^2 - 1} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} + \frac{2x - 1}{8x^2 - 4}$$

1.3.

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$ とおいて, a, b を求めればよい. この式の両辺を $x(x-1)$ 倍すると次を得る.

$$1 = a(x-1) + bx$$

ここで, $x = 0$ を代入すると $a = -1$, $x = 1$ を代入すると $b = 1$ を得る. よって,

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

(2) $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2}$ とおいて, a, b を求めればよい. この式の両辺を $(x+1)(x-2)$ 倍すると次を得る.

$$3x - 1 = a(x-2) + b(x+1)$$

ここで, $x = -1$ を代入すると $a = \dfrac{4}{3}$, $x = 2$ を代入すると $b = \dfrac{5}{3}$ を得る. よって,

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{4}{3(x+1)} + \frac{5}{3(x-2)}$$

(3) $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x-3}$ とおいて, a, b, c を求めればよい. この式の両辺を $(x+1)(x-2)(x-3)$ 倍すると次を得る.

$$2x + 3 = a(x-2)(x-3) + b(x+1)(x-3) + c(x+1)(x-2)$$

ここで, $x = -1$ を代入すると $a = \dfrac{1}{12}$, $x = 2$ を代入すると $b = -\dfrac{7}{3}$, $x = 3$ を代入すると $c = \dfrac{9}{4}$ を得る. よって,

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{12(x+1)} - \frac{7}{3(x-2)} + \frac{9}{4(x-3)}$$

1.4.

(1) 最初に $\cos x$ を求める. $\sin x = \dfrac{5}{13}$ より,

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{144}{169}$$

よって, $\cos x = \pm\dfrac{12}{13}$. ここで, $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ より $\cos x < 0$ である. ゆえに, $\cos x = -\dfrac{12}{13}$ を得る. また, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{5}{12}$.

(2) 最初に $\cos x$ を求める．$\tan x = 2$ より，

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{5}$$

よって, $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. ここで, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x > 0$ である．ゆえに, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ を得る．また, $\sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

1.5.

(1) $\frac{\pi}{12}$ ラジアンは 15° である．$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ より，

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2) $\frac{5}{12}\pi$ ラジアンは 75° である．$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ より，

$$\begin{aligned}\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(3) $\frac{7}{12}\pi$ ラジアンは 105° である．$105^\circ = 45^\circ + 60^\circ$ より，

$$\begin{aligned}\cos\frac{7}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

(4) $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ より, $\sin\frac{\pi}{8} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. ここで, $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ より, $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ である．よって, $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(5) 加法定理から次を得る．

$$\cos\frac{13}{8}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{3}{8}\pi\right) = \cos\frac{3}{8}\pi$$

また, $\cos^2\frac{3}{8}\pi = \frac{1+\cos\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ より, $\cos\frac{3}{8}\pi = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. ここで, $\frac{3}{8}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ より, $\cos\frac{3}{8}\pi > 0$ である．よって,

$$\cos\frac{13}{8}\pi = \cos\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(6) $\dfrac{2}{5}\pi = x$ とおいて, $\cos x$ を求めればよい. $5x = 2\pi$ より, $3x = 2\pi - 2x$ である. よって, $\sin 3x = \sin(2\pi - 2x) = -\sin 2x$. ここで,

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x)\\ &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x\\ &= 2\sin x\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\sin x\\ &= \sin x(4\cos^2 x - 1)\end{aligned}$$

また, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ であるので, $\sin 3x = -\sin 2x$ より次を得る.

$$\sin x(4\cos^2 x - 1) = -2\sin x\cos x$$

ここで, $\sin\dfrac{2}{5}\pi \neq 0$ から

$$\begin{aligned}\sin x(4\cos^2 x - 1) = -2\sin x\cos x &\iff 4\cos^2 x - 1 = -2\cos x\\ &\iff \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

ここで, $\dfrac{2}{5}\pi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x > 0$. ゆえに, $\cos\dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

1.6.

(1) ● $\theta = \dfrac{13}{12}\pi$ のとき. $\dfrac{13}{12}\pi$ラジアン $= 195°$ である. $195° = 135° + 60°$ より, 次を得る.

$$\begin{aligned}\sin\frac{13}{12}\pi = \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\frac{3}{4}\pi\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{3}{4}\pi\sin\frac{\pi}{3}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \cos\frac{13}{12}\pi = \cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\frac{3}{4}\pi\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{3}{4}\pi\sin\frac{\pi}{3}\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\tan\frac{13}{12}\pi = \frac{\sin\frac{13}{12}\pi}{\cos\frac{13}{12}\pi} = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

● $\theta = \dfrac{7}{6}\pi$ のとき.

$$\sin\frac{7}{6}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{6} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{7}{6}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{6} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{7}{6}\pi = \frac{\sin\frac{7}{6}\pi}{\cos\frac{7}{6}\pi} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

● $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$ のとき,

$$\sin\frac{5}{4}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{4} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{5}{4}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{4} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\frac{5}{4}\pi = \frac{\sin\frac{5}{4}\pi}{\cos\frac{5}{4}\pi} = 1$$

● $\theta = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき.

$$\sin\frac{4}{3}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{3} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{4}{3}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{3} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{4}{3}\pi = \frac{\sin\frac{4}{3}\pi}{\cos\frac{4}{3}\pi} = \sqrt{3}$$

● $\theta = \dfrac{17}{12}\pi$ のとき. $\dfrac{17}{12}\pi$ラジアン $= 255^\circ$ である. $255^\circ = 135^\circ + 120^\circ$ より次を得る.

$$\begin{aligned}\sin\frac{17}{12}\pi = \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) &= \sin\frac{3}{4}\pi\cos\frac{2}{3}\pi + \cos\frac{3}{4}\pi\sin\frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos\frac{17}{12}\pi = \cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) &= \cos\frac{3}{4}\pi\cos\frac{2}{3}\pi - \sin\frac{3}{4}\pi\sin\frac{2}{3}\pi \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$
$$\tan\frac{17}{12}\pi = \frac{\sin\frac{17}{12}\pi}{\cos\frac{17}{12}\pi} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4} = 2+\sqrt{3}$$

● $\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき.

$$\sin\frac{3}{2}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{2} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{2} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{2} = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\tan\frac{3}{2}\pi = \frac{\sin\frac{3}{2}\pi}{\cos\frac{3}{2}\pi} = -\frac{1}{0} \quad \text{よって, } \tan\frac{3}{2}\pi \text{ は定義されない.}$$

● $\theta = \dfrac{19}{12}\pi$ のとき.

$$\begin{aligned}
\sin\frac{19}{12}\pi = \sin\left(\frac{13}{12}\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\frac{13}{12}\pi\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{13}{12}\pi\sin\frac{\pi}{2} \\
&= \cos\frac{13}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\
\cos\frac{19}{12}\pi = \cos\left(\frac{13}{12}\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\frac{13}{12}\pi\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{13}{12}\pi\sin\frac{\pi}{2} \\
&= -\sin\frac{13}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\
\tan\frac{19}{12}\pi = \frac{\sin\frac{19}{12}\pi}{\cos\frac{19}{12}\pi} &= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = -\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4} = -2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

● $\theta = \dfrac{5}{3}\pi$ のとき.

$$\sin\frac{5}{3}\pi = \sin\left(\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \sin\pi\cos\frac{2}{3}\pi + \cos\pi\sin\frac{2}{3}\pi = -\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{5}{3}\pi = \cos\left(\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\pi\cos\frac{2}{3}\pi - \sin\pi\sin\frac{2}{3}\pi = -\cos\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{5}{3}\pi = \frac{\sin\frac{5}{3}\pi}{\cos\frac{5}{3}\pi} = -\sqrt{3}$$

● $\theta = \dfrac{7}{4}\pi$ のとき.

$$\sin\frac{7}{4}\pi = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3}{2}\pi\sin\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{7}{4}\pi = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{3}{2}\pi\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\frac{7}{4}\pi = \frac{\sin\frac{7}{4}\pi}{\cos\frac{7}{4}\pi} = -1$$

● $\theta = 2\pi$ のときは, 三角関数の定義から $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$, $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$, $\tan 2\pi = \tan 0 = 0$.

● $\theta = \dfrac{11}{6}\pi$ のとき.

$$\sin\frac{11}{6}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\pi\cos\frac{\pi}{6} - \cos 2\pi\sin\frac{\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{11}{6}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\pi\cos\frac{\pi}{6} - \sin 2\pi\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{11}{6}\pi = \frac{\sin\frac{11}{6}\pi}{\cos\frac{11}{6}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

● $\theta = \dfrac{23}{12}\pi$ のとき. 三角関数の定義から,

$$\begin{aligned}
\sin\frac{23}{12}\pi &= \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\
\cos\frac{23}{12}\pi &= \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\
\tan\frac{23}{12}\pi = \frac{\sin\frac{23}{12}\pi}{\cos\frac{23}{12}\pi} &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = -\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4} = -2+\sqrt{3}
\end{aligned}$$

ゆえに,

x	$\frac{13}{12}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{17}{12}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	-1
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\tan x$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\backslash$

x	$\frac{19}{12}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{23}{12}\pi$	2π
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
$\tan x$	$-2-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-2+\sqrt{3}$	0

1.7.

(1) $3^3 \times 9 = 3^3 \times 3^2 = 3^{3+2} = 3^5 = 243$

(2) $3^{-5} \times 3^7 = 3^{-5+7} = 3^2 = 9$

(3) $\sqrt[6]{4^3} = 4^{\frac{3}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2$

(4) $4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32$

(5) $25^{\frac{-1}{2}} = (5^2)^{\frac{-1}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

(6) $2^{\sqrt{4}} = 2^2 = 4$

(7) $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3 \times 3^{-3} = 3^{1-3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

(8) $24 \times 2^3 = 2^3 \times 3 \times 2^3 = 2^6 \times 3 = 64 \times 3 = 192$

(9) $\frac{1}{5} \times 35^2 = 5^{-1} \times 5^2 \times 7^2 = 5 \times 7^2 = 5 \times 49 = 245$

(10) $2^{10} \times 4^{-5} = 2^{10} \times (2^2)^{-5} = 2^{10} \times 2^{-10} = 2^0 = 1$

(11) $6^5 \times 3^{-4} = 2^5 \times 3^5 \times 3^{-4} = 2^5 \times 3 = 32 \times 3 = 96$

(12) $22^3 \div 121 = 2^3 \times 11^3 \times 11^{-2} = 2^3 \times 11 = 88$

1.8.

(1) $x^2 + 5x + 4 = 0 \iff (x+1)(x+4) = 0$. よって, $x = -1, -4$.

(2) $x^2 + x - 1 = 0$. 2 次方程式の解の公式より, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(3) $2^{2x+1} = 4 \iff 2^{2x+1} = 2^2$. よって, $2x + 1 = 2$. ゆえに $x = \frac{1}{2}$.

(4) $6 \cdot 2^x = 24 \iff 2^x = 2^2$. よって, $x = 2$.

(5) $X = 3^x$ とおく. このとき,

$$9^x - 3^x - 6 = 0 \iff X^2 - X - 6 = 0 \iff (X-3)(X+2) = 0$$

よって, $X = 3, -2$. ここで, $X = 3^x > 0$ より, $X = -2$ は不適. ゆえに, $X = 3$ から $x = 1$ を得る.

(6) $X = 2^x$ とおく．このとき，

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 12 = 0 \iff 2X^2 - 5X - 12 = 0$$
$$\iff (X-4)(2X+3) = 0$$

よって，$X = 4, -\dfrac{3}{2}$．ここで，$X = 2^x > 0$ より，$X = -\dfrac{3}{2}$ は不適．ゆえに，$X = 4$ から $x = 2$ を得る．

1.9.

(1) $\log_2 15 = \log_2(3 \times 5) = \log_2 3 + \log_2 5.$

(2) $\log_2 6 = \log_2(2 \times 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3.$

(3) $\log_2 \dfrac{3}{5} = \log_2 3 - \log_2 5.$

(4) $\log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -\log_2 2 = -1.$

(5) $\log_2 \dfrac{15}{4} = \log_2 15 - \log_2 4 = \log_2(3 \times 5) - \log_2 2^2 = \log_2 3 + \log_2 5 - 2.$

(6) $\log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}.$

(7) $\log_{15} 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 15} = \dfrac{1}{\log_2 3 + \log_2 5}.$

(8) $\log_8 10 = \dfrac{\log_2 10}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2(2 \times 5)}{\log_2 2^3} = \dfrac{\log_2 2 + \log_2 5}{3\log_2 2} = \dfrac{1 + \log_2 5}{3}.$

(9) $\log_5 \dfrac{25}{4} = \log_5 25 - \log_5 4 = \log_5 5^2 - \dfrac{\log_2 4}{\log_2 5} = 2\log_5 5 - \dfrac{2\log_2 2}{\log_2 5} = 2 - \dfrac{2}{\log_2 5}.$

(10) $\log_5 \sqrt{3} = \log_5 3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_5 3 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5} = \dfrac{\log_2 3}{2\log_2 5}.$

(11) $\log_2 \sqrt[5]{15} = \log_2 15^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5}\log_2(3 \times 5) = \dfrac{1}{5}(\log_2 3 + \log_2 5).$

(12) $x = 2^{\log_2 3}$ とおいて x を求めればよい．両辺に底を 2 とする対数をとると，$\log_2 x = \log_2 2^{\log_2 3}$．ここで，

$$\log_2 2^{\log_2 3} = \log_2 3 \times \log_2 2 = \log_2 3$$

よって，$\log_2 x = \log_2 3$ となることから，$x = 3$.

1.10.

(1) $\log_3(x+2) = 0 \iff \log_3(x+2) = \log_3 1$．よって，$x + 2 = 1$ より，$x = -1$.

(2) $\log_9(x^2+2x+1) = \log_9(x+1)^2 = 2\dfrac{\log_3|x+1|}{\log_3 9} = \log_3|x+1|$ より,

$$\begin{aligned}\log_3(x^2+1) = \log_9(x^2+2x+1) &\iff \log_3(x^2+1) = \log_3|x+1| \\ &\iff x^2+1 = |x+1|\end{aligned}$$

ここで, $x \geqq -1$ のときは, $x^2+1 = x+1$ より, $x(x-1)=0$. よって, $x=0,1$. また, $x < -1$ のときは, $x^2+1 = -x-1$ より, $x^2+x+2=0$ すなわち, $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$ となり不適. ゆえに, $x=0,1$.

(3) $\log_2 x = X$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned}(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 6 = 0 &\iff X^2+X-6=0 \\ &\iff (X-2)(X+3)=0 \\ &\iff X = 2,-3\end{aligned}$$

よって, $\log_2 x = 2,-3$ より, $x = 4, \dfrac{1}{8}$.

(4) $\log_x 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 x} = \dfrac{1}{\log_2 x}$ より,

$$\log_2 x = \log_x 2 \iff \log_2 x = \frac{1}{\log_2 x} \iff (\log_2 x)^2 = 1$$

よって, $\log_2 x = \pm 1$. ゆえに, $x = \dfrac{1}{2}, 2$.

1.11.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1}(3x+1) = 3\times(-1)+1 = -2$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(2x^2+3x-1) = 2\times 2^2 + 3\times 2 - 1 = 13$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = 0$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-3x}{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-3}{2-\frac{1}{x}} = -\frac{3}{2}$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0$.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 2$.

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+2}{x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}}=0.$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1+(-1)^{[x]}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{(-1)^x}{x}\right)=2.$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{x+2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2}=+\infty.$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}=\lim_{x\to\infty}(-\sqrt{x}-\sqrt{x+1})=-\infty.$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{3^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^x-\frac{1}{3^x}}{1-\frac{1}{3^x}}=0.$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot 10^x-3}{2\cdot 10^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{10^x}}{2+\frac{1}{10^x}}=2.$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot 3^x+3}{3^x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{3^x}}{1+(\frac{2}{3})^x}=2.$

(16) $\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{t}$ とおくと, $x=3t$. よって,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^3=e^3$$

(17) $\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{t}$ とおくと, $x=\dfrac{t}{2}$. よって,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{4x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^2=e^2$$

(18) $\dfrac{4}{x}=\dfrac{1}{t}$ とおくと, $x=4t$. よって,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+x}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{3x}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{12t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{12}=e^{12}$$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{3^x+4^x}=\lim_{x\to\infty}\left[4^x\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right]^{\frac{1}{x}}=4.$

(20) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{2\cdot 3^x+3\cdot 2^x}=\lim_{x\to\infty}\left[3^x\left\{2+3\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}3\left[2+3\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}=3.$$

(21) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos\frac{x\pi}{2}=1.$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}$. ここで，$-1\leqq\sin x\leqq 1$ より，$\displaystyle -\frac{1}{x}\leqq\frac{\sin x}{x}\leqq\frac{1}{x}$. また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ より，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. よって，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$$

(23) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\log e=1.$

(24) $-1\leqq\cos x\leqq 1$ より，$\displaystyle -\frac{1}{x}\leqq\frac{\cos x}{x}\leqq\frac{1}{x}$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ から，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0.$

1.12.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)=0.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x-2}=7.$

(4) $\displaystyle\frac{2}{x}=\frac{1}{t}$ とおくと，$x=2t$. よって，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=e^2$$

(5) $\displaystyle\frac{3}{2x}=\frac{1}{t}$ とおくと，$\displaystyle x=\frac{3}{2}t$. よって，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{4x}=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{6t}=e^6$$

(6) 最初に, $x \to 0$ ならば $\sin x \to 0$ より, $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = e$ であることに注意する. これより

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot 2\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0}\left\{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right\}^{2\frac{\sin x}{x}} = e^2$$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4}.$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2 = 2.$

(9) $\displaystyle\frac{1}{x} = t$ とおくと, $x \to \infty$ から $t \to 0$. よって,

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin 2x}{2x+\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{\sin 2x}{x}}{2+\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{2+\frac{\sin x}{x}} = \frac{3+2}{2+1} = \frac{5}{3}.$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2 = 2.$

(12) $\displaystyle\frac{1}{x} = t$ とおくと, $x \to \infty$ より, $t \to 0+$. よって,

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{t\to 0+}\frac{e^t-1}{t} = 1$$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x} = 1.$

(14) $a^x = e^{x\log a}$ $(a>0)$ より,

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\log 3}-1}{x}-\frac{e^{x\log 2}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\log 3}-1}{x\log 3}\cdot\log 3-\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\cdot\log 2\right) = \log 3-\log 2$$

(15) 倍角の公式 $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ から,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2$$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\log e = \frac{1}{2}.$

(17) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1}=\frac{5}{2}.$$

(18) 倍角の公式 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ から,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 3x-1}{x^2}+\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{3}{2}x}{x^2}+\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left\{2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-2\left(\frac{\sin\frac{3}{2}x}{x}\right)^2\right\}\\&=2-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}.$

(20) $\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{t}$ とおくと, $x=3t$. よって,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{3x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{3t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=0\times e^3=0$$

(21) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1.$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 1^2=\frac{1}{4}.$$

(23) 三角関数の合成から

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}$$

を得る. ここで, $t=x-\dfrac{\pi}{3}$ とおくと, $x\to\dfrac{\pi}{3}$ から $t\to 0$. よって,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{t}=2$$

(24) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}(e^x+1)=2.$

1.13.

(1) $\lim_{x\to 2+0} x^2 = 4.$

(2) $\lim_{x\to 1-0} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} \dfrac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}(x-1) = 0.$

(3) $y = -\dfrac{1}{x}$ のグラフより, $\lim_{x\to 0+} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty.$

(4) $y = \dfrac{2}{x-2}$ のグラフより, $\lim_{x\to 2-0} \dfrac{2}{x-2} = -\infty.$

(5) $y = \log x$ のグラフより, $\lim_{x\to 0+} \log x = -\infty.$

(6) $x \to 1+0$ は $x \to 1$ かつ $x > 1$ なので, $\lim_{x\to 1+0}[x] = 1.$

(7) $x \to 1-0$ は $x \to 1$ かつ $x < 1$ なので, $\lim_{x\to 1-0}[x] = 0.$

(8) $x \to 1+0$ は $x \to 1$ かつ $x > 1$ なので, $x-1>0$. よって,

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{|x-1|}{-x+1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{-(x-1)} = -1$$

(9) $x \to 0-$ より $x < 0$ である. よって, $y = -\dfrac{1}{x}$ のグラフから

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{|x|} = \lim_{x\to 0-} \left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

(10) $x \to 0-$ は $x \to 0$ かつ $x < 0$ なので, $\lim_{x\to 0-} \left(-\dfrac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0-} \left(-\dfrac{x}{-x}\right) = 1.$

(11) $x \to 2-0$ は $x \to 2$ かつ $x < 2$ なので, $\lim_{x\to 2-0}[x] = 1$. よって,

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{1} = 2$$

(12) $x \to 1-0$ は $x < 1$ なので, x が十分 1 に近い値では $[x] = 0$ である. すなわち, $x \to 1-0$ のとき, $[x]+x \to 1-0$ である. よって,

$$\lim_{x\to 1-0}[[x]+x] = \lim_{[x]+x\to 1-0}[[x]+x] = 0$$

1.14.

(1) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2+1) = 5$, $f(2) = 5$. よって, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ が成り立つので, $f(x) = x^2+1$ は $x = 2$ で連続である.

(2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = 0$, $f(1) = 0$. よって, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ が成り立つので, $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ は $x = 1$ で連続である.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ は $x=0$ で定義されないので, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ は $x=0$ で連続ではない.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\left(-\frac{x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0+}\left(-\frac{x}{x}\right)=-1$
$\displaystyle\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left(-\frac{x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{x}=1.$
よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しないので, $f(x)=-\dfrac{x}{|x|}$ は $x=0$ で連続ではない.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0$, $f(0)=0$. よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ が成り立つので, $f(x)=|x|$ は $x=0$ で連続である.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1,$
$f(1)=-1$. よって, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ が成り立つので, $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ は $x=1$ で連続である.

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}[x+2]=3,\ \lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}[x+2]=2.$
よって, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ は存在しないので, $f(x)=[x+2]$ は $x=1$ で連続ではない.

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+x}{|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0+}(x+1)=1,$
$\displaystyle\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x}{|x|}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x}{-x}=\lim_{x\to 0-}(-x-1)=-1.$
よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しないので, $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x|}$ は $x=0$ で連続ではない.

1.15

(1) $f(x)=x^3-3x+1$ とおく. $f(x)$ は区間 $[0,1]$ で連続である. ここで, $f(0)=1>0$, $f(1)=-1<0$ より, 中間値の定理から $f(x)=0$ となる x が区間 $[0,1]$ に存在する.

(2) $f(x)=\sin x-x\cos x$ とおく. $f(x)$ は区間 $\left[\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right]$ で連続である. ここで, $f(\pi)=\pi>0$, $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=-1<0$ より, 中間値の定理から $f(x)=0$ となる x が区間 $\left[\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right]$ に存在する.

(3) $f(x)=x(x-1)+(x-1)(x-2)+x(x-2)$ とおく. $f(x)$ は連続関数である. ここで, $f(0)=2>0$, $f(1)=-1<0$, $f(2)=2>0$ より, 中間値の定理から $f(x)=0$ となる x が区間 $[0,1]$ と $[1,2]$ に存在する.

1.16.

(1) $(x^4)' = 4x^3$.

(2) $(2x^3 + x^2)' = 2(x^3)' + (x^2)' = 6x^2 + 2x$.

(3) $\left(-\dfrac{1}{x}\right)' = (-x^{-1})' = -(-1)x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$.

(4) $\left(2x^2 - x + \dfrac{2}{x^2}\right)' = (2x^2 - x + 2x^{-2})' = 4x - 1 - 4x^{-3} = 4x - 1 - \dfrac{4}{x^3}$.

(5) $(xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.

(6) $\{e^x(\tan x + 1)\}' = (e^x)'(\tan x + 1) + e^x(\tan x + 1)'$

$$= e^x(\tan x + 1) + e^x \cdot \frac{1}{\cos^2} = e^x\left(\tan x + 1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right).$$

(7) $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = -\dfrac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

(8) $(\sin x \cos x)' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x$.

(9) $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = -\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

(10) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)' = \dfrac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

(11) $\left(\dfrac{e^x}{x}\right)' = \dfrac{(e^x)'x - e^x x'}{x^2} = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}e^x$.

(12) $\left\{(x^2+2x+3)e^x\right\}' = (x^2+2x+3)'e^x + (x^2+2x+3)(e^x)'$

$$= (2x+2)e^x + (x^2+2x+3)e^x = (x^2+4x+5)e^x.$$

(13) $\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}\right)' = -\dfrac{(x^2+3x+2)'}{(x^2+3x+2)^2} = -\dfrac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}$.

(14) $\left(e^{-x}\right)' = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)' = -\dfrac{(e^x)'}{e^{2x}} = -\dfrac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$.

(15) $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\log x}{\log a}\right)' = \dfrac{1}{\log a}(\log x)' = \dfrac{1}{x \log a}$.

(16) $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = -\dfrac{(1-x)'}{(1-x)^2} = -\dfrac{-1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

1.17.

(1) $2x+1 = t$ とおくと, $\left\{(2x+1)^3\right\}' = (t^3)' \times (2x+1)' = 3t^2 \times 2 = 6(2x+1)^2$.

(2) $x^2+1 = t$ とおくと, $\left\{(x^2+1)^4\right\}' = (t^4)' \times (x^2+1)' = 4t^3 \times 2x = 8x(x^2+1)^3$.

(3) $x-\dfrac{1}{x}=t$ とおくと,

$$\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\right\}'=(t^3)'\times\left(x-\frac{1}{x}\right)'=3t^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

(4) $3x=t$ とおくと, $(\tan 3x)'=(\tan t)'\times(3x)'=\dfrac{1}{\cos^2 t}\times 3=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$.

(5) $2x^2+x=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left\{\cos(2x^2+x)\right\}'&=(\cos t)'\times(2x^2+x)'\\&=-\sin t\times(4x+1)=-(4x+1)\sin(2x^2+x)\end{aligned}$$

(6) $\cos x=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\{\sin(\cos x)\}'&=(\sin t)'\times(\cos x)'\\&=\cos t\times(-\sin x)=-\sin x\cos(\cos x)\end{aligned}$$

(7) $-x^2=t$ とおくと, $(e^{-x^2})'=(e^t)'\times(-x^2)'=e^t\times(-2x)=-2xe^{-x^2}$.

(8) $2x^2-\dfrac{1}{x}=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left(e^{2x^2-\frac{1}{x}}\right)'&=(e^t)'\times\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)'\\&=e^t\times\left(4x+\frac{1}{x^2}\right)=\left(4x+\frac{1}{x^2}\right)e^{2x^2-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

(9) $\sin x=t$ とおくと, $\left(e^{\sin x}\right)'=(e^t)'\times(\sin x)'=e^t\times\cos x=\cos xe^{\sin x}$.

(10) $e^x=t$ とおくと, $\left(e^{e^x}\right)'=(e^t)'\times(e^x)'=e^t\times e^x=e^xe^{e^x}=e^{x+e^x}$.

(11) $3x^2+1=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3x^2+1}\right)'&=\left\{\left(3x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}'\\&=(t^{\frac{1}{2}})'\times(3x^2+1)'\\&=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\times 6x=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}\end{aligned}$$

(12) $2x^2+3x=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{2x^2+3x}\right)'&=\left\{\left(2x^2+3x\right)^{\frac{1}{3}}\right\}'\\&=(t^{\frac{1}{3}})'\times(2x^2+3x)'\\&=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\times(4x+3)=\frac{4x+3}{3(2x^2+3x)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

(13) $4x^2+x^{\frac{1}{2}}=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{4x^2+\sqrt{x}}\right)' &= \left\{\left(4x^2+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}' \\ &= (t^{\frac{1}{2}})' \times (4x^2+x^{\frac{1}{2}})' \\ &= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times \left(8x+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{t}}(16x\sqrt{x}+1) = \frac{16x\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{4x^2+\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

(14) $\sin x+1=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\sin x+1}\right)' &= \left\{(\sin x+1)^{\frac{1}{2}}\right\}' \\ &= (t^{\frac{1}{2}})' \times (\sin x+1)' \\ &= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x+1}}\end{aligned}$$

(15) $x^{\frac{1}{2}}=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}(\sin\sqrt{x})' &= \left(\sin x^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= (\sin t)' \times (x^{\frac{1}{2}})' \\ &= \cos t \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

(16) $x^2+1=t$ とおくと, $\left\{\log(x^2+1)\right\}' = (\log t)' \times (x^2+1)' = \dfrac{1}{t} \times 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

(17) $e^{\log x}=y$ とおくと, $\log y = \log e^{\log x} = \log x$. よって, $y=e^{\log x}=x$. ゆえに, $(e^{\log x})' = (x)' = 1$.

(18) $4x=t$ とおくと, $(\tan 4x)' = (\tan t)' \times (4x)' = \dfrac{1}{\cos^2 t} \times 4 = \dfrac{4}{\cos^2 4x}$.

(19) $x^2=t$ とおくと, $\left(2^{x^2}\right)' = (2^t)' \times (x^2)' = 2^t\log 2 \times 2x = x2^{x^2+1}\log 2$.

(20) $2^x=t$ とおくと, $\left(3^{2^x}\right)' = (3^t)' \times (2^x)' = 3^t\log 3 \times 2^x\log 2 = 2^x3^{2^x}\log 2\cdot\log 3$.

(21) $\dfrac{\sin x}{x+1} = t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left\{\left(\frac{\sin x}{x+1}\right)^2\right\}' &= (t^2)' \times \left(\frac{\sin x}{x+1}\right)' \\ &= 2t \times \frac{(x+1)\cos x - \sin x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2\sin x}{(x+1)^3}\left\{(x+1)\cos x - \sin x\right\}\end{aligned}$$

(22) $x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left\{\log(x+\sqrt{x^2+1})\right\}' &= \left[\log\left\{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right\}\right]' \\ &= (\log t)'\left\{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right\}' \\ &= \frac{1}{t}\left\{1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}} \times (x^2+1)'\right\} \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

(23) $1+x^2 = t$ とおくと,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \left\{(1+x^2)^{\frac{-1}{2}}\right\}' = (t^{-\frac{1}{2}})' \times (1+x^2)' = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \times 2x = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(24) $(\sin^2 x + \sin 2x)' = 2\sin x \times (\sin x)' + \cos 2x \times (2x)' = 2\sin x\cos x + 2\cos 2x.$

(25) $(e^{\tan x})' = e^{\tan x}(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}e^{\tan x}.$

(26) $\{\log(e^x+1)\}' = \dfrac{(e^x+1)'}{e^x+1} = \dfrac{e^x}{e^x+1}.$

(27)

$$\left(\log\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)' = \left\{\log\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{x^2+1-x^2}\right\}'$$
$$= \left\{2\log(\sqrt{x^2+1}-x)\right\}'$$
$$= 2\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)'}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x}\left\{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times(x^2+1)'-1\right\}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

(28)

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x+e^{-x})'(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})'}{(e^x-e^{-x})^2}$$
$$= \frac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}$$
$$= \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}-e^{2x}-2-e^{-2x}}{(e^x-e^{-x})^2}$$
$$= -\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$$

(29) $\left\{\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)' = \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right).$

(30) $\left(\dfrac{2}{1+e^{3x}}\right)' = -\dfrac{2(1+e^{3x})'}{(1+e^{3x})^2} = -\dfrac{6e^{3x}}{(1+e^{3x})^2}.$

1.18.

(1) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)}{\sqrt{x+3}(x-2)^3}$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\log f(x) = \log\frac{(x+1)^2(x-1)}{\sqrt{x+3}(x-2)^3}$$
$$= 2\log(x+1)+\log(x-1)-\frac{1}{2}\log(x+3)-3\log(x-2)$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x+3)}-\frac{3}{x-2}$$

よって,

$$f'(x) = f(x)\left\{\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x+3)} - \frac{3}{x-2}\right\}$$
$$= \frac{(x+1)^2(x-1)}{\sqrt{x+3}(x-2)^3}\left\{\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x+3)} - \frac{3}{x-2}\right\}$$

(2) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)^2\sqrt{x-1}}{(2x-1)^3(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\log f(x) = \log \frac{(x^2+1)^2\sqrt{x-1}}{(2x-1)^3(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= 2\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\log(x-1) - 3\log(2x-1) - \frac{3}{2}\log(x^3+1)$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3(2x-1)'}{2x-1} - \frac{3(x^3+1)'}{2(x^3+1)}$$
$$= \frac{4x}{x^2+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{6}{2x-1} - \frac{9x^2}{2(x^3+1)}$$

よって,

$$f'(x) = f(x)\left\{\frac{4x}{x^2+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{6}{2x-1} - \frac{9x^2}{2(x^3+1)}\right\}$$
$$= \frac{(x^2+1)^2\sqrt{x-1}}{(2x-1)^3(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{4x}{x^2+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{6}{2x-1} - \frac{9x^2}{2(x^3+1)}\right\}$$

(3) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}{(2x^2+3)^3\sqrt[3]{x+1}}$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\log f(x) = \log \frac{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}{(2x^2+3)^3\sqrt[3]{x+1}}$$
$$= 2\log(x-1) + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 3\log(2x^2+3) - \frac{1}{3}\log(x+1)$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x-1} + \frac{(x^2+1)'}{2(x^2+1)} - \frac{3(2x^2+3)'}{2x^2+3} - \frac{1}{3(x+1)}$$
$$= \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{12x}{2x^2+3} - \frac{1}{3(x+1)}$$

よって，

$$f'(x) = f(x)\left\{\frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{12x}{2x^2+3} - \frac{1}{3(x+1)}\right\}$$
$$= \frac{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}{(2x^2+3)^3\sqrt[3]{x+1}}\left\{\frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{12x}{2x^2+3} - \frac{1}{3(x+1)}\right\}$$

(4) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ とおく．両辺の対数をとると，

$$\log f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)^x = -x\log x$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (-x)'\log x - x(\log x)' = -\log x - 1$$

よって，

$$f'(x) = f(x)(-\log x - 1) = -\left(\frac{1}{x}\right)^x(\log x + 1)$$

(5) $f(x) = (\sin x)^x$ とおく．両辺の対数をとると，

$$\log f(x) = \log(\sin x)^x = x\log(\sin x)$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x'\log(\sin x) + x\left\{\log(\sin x)\right\}'$$
$$= \log(\sin x) + x\frac{(\sin x)'}{\sin x}$$
$$= \log(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}$$

よって，

$$f'(x) = f(x)\left\{\log(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}\right\}$$
$$= (\sin x)^x\left\{\log(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}\right\}$$

(6) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ とおく．両辺の対数をとると，

$$\log f(x) = \log x^{\frac{1}{x}} = \frac{\log x}{x}$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x(\log x)' - x'\log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

よって,

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{1 - \log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x)$$

1.19.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2\sin^3\theta)'}{(2\cos^3\theta)'} = \dfrac{6\sin^2\theta\cos\theta}{-6\cos^2\theta\sin\theta} = -\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2\sin\theta)'}{(3\cos\theta)'} = -\dfrac{2\cos\theta}{3\sin\theta}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(3\sin\theta)'}{(2\cos^2\theta)'} = \dfrac{3\cos\theta}{-4\sin\theta\cos\theta} = -\dfrac{3}{4\sin\theta}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2^t - 2^{-t})'}{(2^t + 2^{-t})'} = \dfrac{2^t\log 2 + 2^{-t}\log 2}{2^t\log 2 - 2^{-t}\log 2} = \dfrac{2^t + 2^{-t}}{2^t - 2^{-t}}$

(5) $$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{2t}{1+t^2})'}{(\frac{1-t^2}{1+t^2})'} = \frac{\frac{(2t)'(1+t^2)-2t(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}}{\frac{(1-t^2)'(1+t^2)-(1-t^2)(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}}$$
$$= \frac{2(1+t^2) - 2t\cdot 2t}{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)} = \frac{t^2-1}{2t}$$

(6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\frac{e^t-e^{-t}}{2})'}{(\frac{e^t+e^{-t}}{2})'} = \dfrac{\frac{e^t+e^t}{2}}{\frac{e^t-e^{-t}}{2}} = \dfrac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$

1.20.

(1) $y' = -1 < 0$ より, $y = -x+1$ の逆関数は存在する.

$$y = -x+1 \iff x = -y+1$$

よって, $y = -x+1$ の逆関数は $y = -x+1$.

(2) $y' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ より, $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ の逆関数は存在する.

$$y = \frac{1}{x}\ (x > 0) \iff x = \frac{1}{y}\ (y > 0)$$

よって, $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ の逆関数は $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

(3) $x < -1$ において $y' = 2x+2 = 2(x+1) < 0$ より, $y = x^2+2x-1$ $(x \leqq -1)$ の逆関数は存在する.

$$\begin{aligned} y = x^2+2x-1 &\iff x^2+2x-1-y = 0 \\ &\iff x = -1 \pm \sqrt{y+2} \end{aligned}$$

ここで, $x \leqq -1$ より, $x = -1-\sqrt{y+2}$. よって, $y = x^2+2x-1$ $(x \leqq -1)$ の逆関数は $y = -1-\sqrt{x+2}$.

(4) $y' = 2^x \log 2 > 0$ より, $y = 2^x$ の逆関数は存在する.

$$y = 2^x \iff \log_2 y = \log_2 2^x = x$$

よって, $y = 2^x$ の逆関数は $y = \log_2 x$

(5) $y' = 4x + 4 = 4(x+1)$ より, $x = -1$ のとき $y' = 0$. よって, $y = 2x^2 + 4x + 1$ $(x \leqq 1)$ は逆関数を持たない.

(6) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ より, $y = \sqrt{x}$ の逆関数は存在する.

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \ (y \geqq 0)$$

よって, $y = \sqrt{x}$ の逆関数は $y = x^2$ $(x \geqq 0)$.

(7) $x > 0$ のとき $y' = 2^x \log 2 - 2^{-x} \log 2 = (2^x - 2^{-x}) \log 2 > 0$ より, $y = 2^x + 2^{-x}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数は存在する

$$\begin{aligned} y = 2^x + 2^{-x} &\iff 2^{2x} - y \cdot 2^x + 1 = 0 \\ &\iff 2^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \\ &\iff x = \log_2 \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \end{aligned}$$

ここで, $y = 2^x + 2^{-x}$ は点 $\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$ を通るので, $y = \dfrac{5}{2}$ を上の式に代入することで, $x = \log_2 \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ を得る. よって, $y = 2^x + 2^{-x}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数は $y = \log_2 \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$.

(8) $x > 0$ のとき $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ より, $y = \sqrt{x^2 + 1}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数は存在する.

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \iff y^2 = x^2 + 1 \ (y \geqq 1) \iff x = \pm\sqrt{y^2 - 1} \ (y \geqq 1)$$

ここで, $x \geqq 0$ より, $x = \sqrt{y^2 - 1}$. よって, $y = \sqrt{x^2 + 1}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数は $y = \sqrt{x^2 - 1}$ $(x \geqq 1)$.

1.21.

(1) $x = \cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ とおいて $\sin x$ を求めればよい. $x = \cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ より, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. よって, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \dfrac{9}{10}$ から $\sin x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. ここで, $x \in [0, \pi]$ より $\sin x \geqq 0$. ゆえに, $\sin x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

(2) $x=\cos^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおいて $\tan x$ を求めればよい. $x=\cos^{-1}\dfrac{1}{3}$ より, $\cos x=\dfrac{1}{3}$. よって, $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}=9$ から $\tan x=\pm 2\sqrt{2}$. ここで, $x\in[0,\pi]$ かつ $\cos x>0$ より $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. すなわち $\tan x \geqq 0$. ゆえに $\tan x=2\sqrt{2}$.

(3) $x=\sin^{-1}\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ とおいて $\cos x$ を求めればよい. $x=\sin^{-1}\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ より, $\sin x=-\dfrac{4}{5}$. よって, $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\dfrac{9}{25}$ から $\cos x=\pm\dfrac{3}{5}$. ここで, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x\geqq 0$. ゆえに $\cos x=\dfrac{3}{5}$.

(4) $x=\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおいて $\sin x$ を求めればよい. $x=\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ より, $\tan x=\dfrac{3}{4}$. よって, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\dfrac{16}{25}$ から $\cos x=\pm\dfrac{4}{5}$. ここで, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ より $\cos x\geqq 0$. よって $\cos x=\dfrac{4}{5}$. ゆえに $\sin x=\tan x\cdot\cos x=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{5}$.

(5) $x=\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ とおいて $\tan x$ を求めればよい. $x=\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ より, $\cos x=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. よって, $\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\dfrac{1}{9}$ から $\tan x=\pm\dfrac{1}{3}$. ここで, $x\in[0,\pi]$, $\cos x>0$ より $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. ゆえに, $\tan x>0$ となり, $\tan x=\dfrac{1}{3}$.

(6) $x=\tan^{-1}2$ とおいて $\cos x$ を求めればよい. $x=\tan^{-1}2$ より, $\tan x=2$. よって, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1}{5}$ から $\cos x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. ここで, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ より $\cos x>0$. よって, $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(7) $x=\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$, $y=\cos^{-1}\dfrac{4}{5}$ とおいて $\sin(x+y)$ を求めればよい.
$x=\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ より $\sin x=\dfrac{3}{5}$. よって, $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\dfrac{16}{25}$ から $\cos x=\pm\dfrac{4}{5}$. ここで, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x=\dfrac{4}{5}$.
一方, $y=\cos^{-1}\dfrac{4}{5}$ より $\cos y=\dfrac{4}{5}$. よって, $\sin^2 y=1-\cos^2 y=\dfrac{9}{25}$ から $\sin y=\pm\dfrac{3}{5}$. ここで $y\in[0,\pi]$ より $\sin y=\dfrac{3}{5}$.
よって,

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$$

(8) $x=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $y=\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ とおいて $\cos(x+y)$ を求めればよい.

$x=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ より $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. よって, $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\dfrac{9}{10}$ から $\cos x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. ここで, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

一方, $y=\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ より $\sin y=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. よって, $\cos^2 y=1-\sin^2 y=\dfrac{1}{10}$ から $\cos y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. ここで $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

よって,

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=0$$

(9) $x=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$, $y=\tan^{-1}4$ とおいて $\tan(x+y)$ を求めればよい.

$x=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$ より $\tan x=\dfrac{1}{2}$. また, $y=\tan^{-1}4$ より $\tan y=4$. よって,

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{1}{2}+4}{1-\frac{1}{2}\cdot 4}=-\frac{9}{2}$$

(10) $x=\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$, $y=\sin^{-1}\dfrac{12}{13}$ とおいて $\tan(x+y)$ を求めればよい.

$x=\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$ より $\cos x=\dfrac{3}{5}$. よって, $\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\dfrac{16}{9}$ から $\tan x=\pm\dfrac{4}{3}$. ここで, $x\in[0,\pi]$, $\cos x>0$ より $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. よって, $\tan x=\dfrac{4}{3}$.

一方, $y=\sin^{-1}\dfrac{12}{13}$ より $\sin y=\dfrac{12}{13}$. よって,

$$\tan^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}-1=\frac{1}{1-\sin^2 y}-1=\frac{144}{25}$$

から $\tan y=\pm\dfrac{12}{5}$. ここで $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin y>0$ より $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. よって, $\tan y=\dfrac{12}{5}$.

ゆえに,

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{12}{5}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{5}}=-\frac{56}{33}$$

(11) $x=\sin^{-1}\dfrac{7}{25}$, $y=\sin^{-1}\dfrac{24}{25}$ とおいて $x+y$ を求めればよい.

$x=\sin^{-1}\dfrac{7}{25}$ より $\sin x=\dfrac{7}{25}$. よって, $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\dfrac{576}{625}$ から $\cos x=\pm\dfrac{24}{25}$. ここで, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x=\dfrac{24}{25}$.

一方, $y=\sin^{-1}\dfrac{24}{25}$ より $\sin y=\dfrac{24}{25}$. よって, $\cos^2 y=1-\sin^2 y=\dfrac{49}{625}$ から $\cos y=\pm\dfrac{7}{25}$. ここで $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos y=\dfrac{7}{25}$.

ゆえに,

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=\frac{7}{25}\cdot\frac{7}{25}+\frac{24}{25}\cdot\frac{24}{25}=1$$

また, $x,y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ から $x+y\in[-\pi,\pi]$. よって, $x+y=\dfrac{\pi}{2}$.

(12) $x=\tan^{-1}2$, $y=\tan^{-1}3$ とおいて $x+y$ を求めればよい.
$x=\tan^{-1}2$ より $\tan x=2$. また, $y=\tan^{-1}3$ より $\tan y=3$. よって,

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1$$

一方, $x,y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ かつ $\tan x,\tan y>0$ より $x,y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. これより $x+y\in(0,\pi)$. よって, $x+y=\dfrac{3}{4}\pi$.

(13) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)=\sin^{-1}(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$.

(14) $\cos^{-1}\left\{\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}=\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\pi$.

1.22.

(1) $\left(\cos^{-1}\dfrac{x}{2}\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\times\left(\dfrac{x}{2}\right)'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(2) $(\tan^{-1}e^x)'=\dfrac{1}{1+e^{2x}}\times(e^x)'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

(3) $\left\{\tan(\cos^{-1}x)\right\}'=\dfrac{1}{\cos^2(\cos^{-1}x)}\times(\cos^{-1}x)'=-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$,
($\cos(\cos^{-1}x)=x$ を利用した.)

(4) $\left(e^{\sin^{-1}x}\right)'=e^{\sin^{-1}x}(\sin^{-1}x)'=\dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

(5) $f(x)=(\sin^{-1}x)^x$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\log f(x)=\log(\sin^{-1}x)^x=x\log(\sin^{-1}x)$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\log(\sin^{-1}x)+x\cdot\frac{(\sin^{-1}x)'}{\sin^{-1}x}\\&=\log(\sin^{-1}x)+\frac{x}{(\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

よって,

$$f'(x) = f(x)\left\{\log(\sin^{-1}x) + \frac{x}{(\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}}\right\}$$
$$= (\sin^{-1}x)^x\left\{\log(\sin^{-1}x) + \frac{x}{(\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

(6) $\left\{\sin^{-1}(\cos x)\right\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \times (\cos x)' = -\dfrac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = -\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$

(7) $\left\{\cos^{-1}(\sin x)\right\}' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \times (\sin x)' = -\dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = -\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$

(8) $\left\{\sin^{-1}(\sin x)\right\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \times (\sin x)' = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$

(9) $\left\{\cos^{-1}(\cos x)\right\}' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \times (\cos x)' = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$

(10) $f(x) = (\tan^{-1}x)^x$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\log f(x) = \log(\tan^{-1}x)^x = x\log(\tan^{-1}x)$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log(\tan^{-1}x) + x\cdot\frac{(\tan^{-1}x)'}{\tan^{-1}x}$$
$$= \log(\tan^{-1}x) + \frac{x}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$$

よって,

$$f'(x) = f(x)\left\{\log(\tan^{-1}x) + \frac{x}{(1+x^2)\tan^{-1}x}\right\}$$
$$= (\tan^{-1}x)^x\left\{\log(\tan^{-1}x) + \frac{x}{(1+x^2)\tan^{-1}x}\right\}$$

(11) $\left(\cos^{-1}\sqrt{x}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \times (\sqrt{x})' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

(12) $\left(\tan^{-1}\sqrt{x-1}\right)' = \dfrac{1}{1+(\sqrt{x-1})^2} \times (\sqrt{x-1})' = \dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

1.23.

(1) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ を示す.

$y_1 = \sin^{-1}x$, $y_2 = \cos^{-1}$ とおいて, $y_1 + y_2$ を求めればよい.

$y_1 = \sin^{-1}x$ より, $\sin y_1 = x$. よって, $\cos^2 y_1 = 1 - \sin^2 y_1 = 1 - x^2$ から $\cos y_1 = \pm\sqrt{1-x^2}$. ここで, $y_1 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ より, $\cos y_1 = \sqrt{1-x^2}$.

一方, $y_2=\cos^{-1}x$ より $\cos y_2=x$. よって, $\sin^2 y_2=1-\cos^2 y_2=1-x^2$ から $\sin y_2=\pm\sqrt{1-x^2}$. ここで, $y_2\in[0,\pi]$ より $\sin y_2=\sqrt{1-x^2}$.

よって,

$$\begin{aligned}\sin(y_1+y_2)&=\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2\\&=x\cdot x+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}=1\end{aligned}$$

ここで, $y_1\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y_2\in[0,\pi]$ より, $y_1+y_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$. これより, $y_1+y_2=\frac{\pi}{2}$.

(2) $\cos\left(\sin^{-1}x\right)=\sqrt{1-x^2}$ を示す.
$y=\sin^{-1}x$ とおいて, $\cos y$ を求めればよい.
$y=\sin^{-1}x$ より $\sin y=x$. よって, $\cos^2 y=1-\sin^2 y=1-x^2$ から $\cos y=\pm\sqrt{1-x^2}$. ここで, $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ より, $\cos y=\sqrt{1-x^2}$.

1.24.

(1) $y=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおく. このとき, $\sin y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. よって,

$$\tan^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}-1=\frac{1}{1-\sin^2 y}-1=\frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}}-1=x^2$$

よって, $\tan y=\pm x$. ここで, $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ かつ $y=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0$ より, $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ゆえに, $\tan y=x$ となり, $y=\tan^{-1}x$.

(2) $y=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ とおく. このとき, $\tan y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. よって,

$$\sin^2 y=\tan^2 y\cdot\cos^2 y=\frac{\tan^2 y}{1+\tan^2 y}=\frac{\frac{x^2}{1-x^2}}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}=x^2$$

よって, $\sin y=\pm x$. ここで, $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ かつ $y=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}>0$ より, $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. ゆえに, $\sin y=x$ となり, $y=\sin^{-1}x$.

(3) $y=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ とおく. このとき, $\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. よって,

$$\tan^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}-1=\frac{1}{\frac{1}{1+x^2}}-1=x^2$$

よって, $\tan y=\pm x$. ここで, $y\in[0,\pi]$ かつ $\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$ より, $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ゆえに, $\tan y=x$ となり, $y=\tan^{-1}x$.

(4) $y=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ とおく. このとき, $\tan y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. よって,

$$\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+\frac{1-x^2}{x^2}}=x^2$$

よって, $\cos y=\pm x$. ここで, $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ かつ $\tan y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}>0$ より, $y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. ゆえに, $\cos y=x$ となり, $y=\cos^{-1}x$.

1.25.

(1) $(x^4)''=(4x^3)'=12x^2$

(2) $(3x^2)^{(3)}=(6x)''=(6)'=0$

(3) $(2x^3+x^2)''=(6x^2+2x)'=12x+2$

(4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(3)}=(x^{-1})^{(3)}=(-x^{-2})''=(2x^{-3})'=-6x^{-4}=-\dfrac{6}{x^4}$

(5) $(x\log x)''=(\log x+1)'=\dfrac{1}{x}$

(6) $(e^{\sin x})''=(\cos x e^{\sin x})'=(\cos x)'e^{\sin x}+\cos x(e^{\sin x})'=(-\sin x+\cos^2 x)e^{\sin x}$

(7) $(x^{24})'=24x^{23}$, $(x^{24})''=(24x^{23})'=24\cdot 23x^{22}$,
$(x^{24})^{(3)}=(24\cdot 23x^{22})'=24\cdot 23\cdot 22x^{21}$, ...,
よって, $n\leqq 24$ ならば,

$$(x^{24})^{(n)}=24\cdot 23\cdots(24-n+1)x^{24-n}$$

ゆえに, $(x^{24})^{(24)}=24!$, $(x^{24})^{(25)}=0$.

(8) $(x^n)'=nx^{n-1}$, $(x^n)''=n(n-1)x^{n-2}$, $(x^n)^{(3)}=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,...,
よって, $(x^n)^{(n-1)}=n(n-1)\cdots(n-n+2)x^{n-n+1}=n!x$

(9) $(\sqrt{x})^{(3)}=(x^{\frac{1}{2}})^{(3)}=\left(\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)''=\left(-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)'=\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{3}{8x^2\sqrt{x}}$

(10) $(e^{\frac{x}{2}})'=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $(e^{\frac{x}{2}})''=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2e^{\frac{x}{2}}$, $(e^{\frac{x}{2}})^{(3)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3e^{\frac{x}{2}}$,...,
よって, $(e^{\frac{x}{2}})^{(7)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^7e^{\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{128}e^{\frac{x}{2}}$

(11) $\left(\dfrac{1}{x-1}\right)'=\{(x-1)^{-1}\}'=-(x-1)^{-2}$,
$\left(\dfrac{1}{x-1}\right)''=\{-(x-1)^{-2}\}'=(-1)(-2)(x-1)^{-3}$,

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(3)}=\{(-1)(-2)(x-1)^{-3}\}'=(-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4},...,$$

よって,

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(10)}=(-1)(-2)\times\cdots\times(-10)(x-1)^{-11}=\frac{10!}{(x-1)^{11}}$$

(12) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}=(x-2)^{-1}-(x-1)^{-1}$ である.

これより

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right\}' &= \{(x-2)^{-1}-(x-1)^{-1}\}' \\
&= -(x-2)^{-2}-(-1)(x-1)^{-2} \\
\left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right\}'' &= \{-(x-2)^{-2}-(-1)(x-1)^{-2}\}' \\
&= (-1)(-2)(x-2)^{-3}-(-1)(-2)(x-1)^{-3} \\
\left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right\}^{(3)} &= \{(-1)(-2)(x-2)^{-3}-(-1)(-2)(x-1)^{-3}\}' \\
&= (-1)(-2)(-3)(x-2)^{-4}-(-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4} \\
\left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right\}^{(4)} &= \{(-1)(-2)(-3)(x-2)^{-4}-(-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4}\}' \\
&= (-1)(-2)(-3)(-4)(x-2)^{-5}-(-1)(-2)(-3)(-4)(x-1)^{-5} \\
\left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right\}^{(5)} &= \{(-1)(-2)(-3)(-4)(x-2)^{-5}-(-1)(-2)(-3)(-4)(x-1)^{-5}\}' \\
&= (-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(x-2)^{-6}-(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(x-1)^{-6} \\
&= \frac{120}{(x-1)^6}-\frac{120}{(x-2)^6}
\end{aligned}$$

1.26. 正しくは数学的帰納法で証明をする必要があるが, 本書のレベルでは, 規則性を見出した段階で結論付けてもよい.

(1) $(\cos x)'=-\sin x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$(\cos x)''=-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos(x+\pi)$,

$(\cos x)^{(3)}=-\sin(x+\pi)=\cos\left(x+\dfrac{3}{2}\pi\right)$,...,

よって,

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

と予想できる. 以下, 数学的帰納法を用いてこれを示す.

$n=1$ のときは, 上記計算から正しいことが分かる. $n=k$ のときに予想が正しいと仮定して, $n=k+1$ のときに予想が正しいことを示す. $n=k$ の仮定から,

$$(\cos x)^{(k+1)} = \{(\cos x)^{(k)}\}' = \left\{\cos\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)\right\}'$$
$$= -\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right) = \cos\left(x+\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{k+1}{2}\pi\right)$$

よって, 数学的帰納法から, すべての $n=1,2,\ldots$ に対して,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

となることが示された.

(2) $\{\log(1-x)\}' = -\dfrac{1}{1-x} = (x-1)^{-1}$,
$\{\log(1-x)\}'' = \{(x-1)^{-1}\}' = -(x-1)^{-2}$,
$\{\log(1-x)\}^{(3)} = \{(-1)(x-1)^{-2}\}' = (-1)(-2)(x-1)^{-3}$,
$\{\log(1-x)\}^{(4)} = \{(-1)(-2)(x-1)^{-3}\}' = (-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4}$,...,
よって,

$$\{\log(1-x)\}^{(n)} = (-1)(-2)\times\cdots\times(-n+1)(x-1)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$$

と予想できる. 以下, 数学的帰納法を用いてこれを示す.

$n=1$ のときは, 上記計算から正しいことが分かる. $n=k$ のときに予想が正しいと仮定して, $n=k+1$ のときに予想が正しいことを示す. $n=k$ の仮定から,

$$\begin{aligned}(\log(1-x))^{(k+1)} &= \{(\log(1-x))^{(k)}\}' \\ &= \left\{\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x-1)^k}\right\}' \\ &= \left\{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^{-k}\right\}' \\ &= -k\cdot(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^{-k-1} = \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}}\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法から, すべての $n=1,2,\ldots$ に対して,

$$\{\log(1-x)\}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$$

となることが示された.

(3) $(e^{-x})' = -e^{-x}$, $(e^{-x})'' = (-1)^2e^{-x}$, $(e^{-x})^{(3)} = (-1)^3e^{-x}$,...,
よって, $(e^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$

(4) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,

$(\sqrt{x})'' = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$,

$$(\sqrt{x})^{(3)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}},$$
$$(\sqrt{x})^{(4)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}},\dots,$$

よって,

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x})^{(n)} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)x^{-\frac{2n-1}{2}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!}x^{-\frac{2n-1}{2}}, \quad (n \geqq 2)
\end{aligned}$$

と予想できる. 以下, 数学的帰納法を用いてこれを示す.

$n=2$ のときは, 上記計算から正しいことが分かる. $n=k$ のときに予想が正しいと仮定して, $n=k+1$ のときに予想が正しいことを示す. $n=k$ の仮定から,

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x})^{(k+1)} &= \{(\sqrt{x})^{(k)}\}' \\
&= \left\{\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!}x^{-\frac{2k-1}{2}}\right\}' \\
&= -\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!}x^{-\frac{2k+1}{2}} \\
&= \frac{(2k-2)(2k-1)}{2^2(k-1)}\frac{(-1)^k(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!}x^{-\frac{2k+1}{2}} \\
&= \frac{(-1)^k(2k-1)!}{2^{2k}(k-1)!}x^{-\frac{2k+1}{2}}
\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法から, すべての $n=2,\dots$ に対して,

$$(\sqrt{x})^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!}x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

となることが示された. また, $n=1$ のときは $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ である.

(5) $(e^x\cos x)' = e^x\cos x - e^x\sin x = \sqrt{2}e^x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$(e^x\cos x)'' = \sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}^2e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(e^x\cos x)^{(3)} = \sqrt{2}^2e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2}^2e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}^3e^x\cos\left(x+\frac{3}{4}\pi\right),\dots,$$

よって, $(e^x\cos x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\dfrac{n}{4}\pi\right)$ と予想できる. 以下, 数学的帰納法を用いてこれを示す.

$n=1$ のときは, 上記計算から正しいことが分かる. $n=k$ のときに予想が正しいと仮定して, $n=k+1$ のときに予想が正しいことを示す. $n=k$ の

仮定から,

$$\begin{aligned}(e^x \cos x)^{(k+1)} &= \{(e^x \cos x)^{(k)}\}' \\ &= \left\{2^{\frac{k}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{k}{4}\pi\right)\right\}' \\ &= 2^{\frac{k}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{k}{4}\pi\right) - 2^{\frac{k}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{k}{4}\pi\right) \\ &= 2^{\frac{k}{2}} e^x \cdot \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{k}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{k+1}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法から, すべての $n = 1, 2, ...$ に対して,

$$(e^x \cos x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n}{4}\pi\right)$$

となることが示された.

(6) $\left(\dfrac{1}{x+2}\right)' = \{(x+2)^{-1}\}' = -(x+2)^{-2}$,
$\left(\dfrac{1}{x+2}\right)'' = \{-(x+2)^{-2}\}' = (-1)(-2)(x+2)^{-3}$,
$\left(\dfrac{1}{x+2}\right)^{(3)} = \{(-1)(-2)(x+2)^{-3}\}' = (-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4}$,...,
よって,

$$\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} = (-1)(-2) \times \cdots \times (-n)(x+2)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$$

と予想できる. 以下, 数学的帰納法を用いてこれを示す.

$n = 1$ のときは, 上記計算から正しいことが分かる. $n = k$ のときに予想が正しいと仮定して, $n = k+1$ のときに予想が正しいことを示す. $n = k$ の仮定から,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(k+1)} &= \left\{\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(k)}\right\}' \\ &= \left\{\frac{(-1)^k k!}{(x+2)^{k+1}}\right\}' \\ &= \left\{(-1)^k k!(x+2)^{-(k+1)}\right\}' \\ &= -(k+1) \cdot (-1)^k k!(x+2)^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)!(x+2)^{-(k+2)} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(x+2)^{k+2}}\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法から, すべての $n=1,2,\ldots$ に対して,

$$\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$$

となることが示された.

(7) $(x^2)'=2x,\ (x^2)''=2,\ (x^2)^{(n)}=0\ (n\geqq 3),\ (\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$ より, ライプニッツの公式から,

$$\begin{aligned}(x^2\sin x)^{(n)}&=x^2(\sin x)^{(n)}+n(x^2)'(\sin x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2!}(x^2)''(\sin x)^{(n-2)}\\&\qquad+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(x^2)^{(3)}(\sin x)^{(n-3)}+\cdots\\&=x^2\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+2nx\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)\\&\qquad+n(n-1)\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right),\quad (n\geqq 2)\end{aligned}$$

また, $(x^2\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x=x^2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+2x\sin x.$

(8) $(x^3)'=3x^2,\ (x^3)''=6x,\ (x^3)^{(3)}=6,\ (x^3)^{(n)}=0\ (n\geqq 4),$
$(\log x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. よって, ライプニッツの公式から

$$\begin{aligned}(x^3\log x)^{(n)}&=x^3(\log x)^{(n)}+n(x^3)'(\log x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2!}(x^3)''(\log x)^{(n-2)}\\&\qquad+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(x^3)^{(3)}(\log x)^{(n-3)}\\&\qquad+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(x^3)^{(4)}(\log x)^{(n-4)}+\cdots\\&=x^3\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+3nx^2\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}\\&\qquad+3n(n-1)x\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}+n(n-1)(n-2)\frac{(-1)^{n-4}(n-4)!}{x^{n-3}}\\&=\frac{(-1)^{n-4}(n-4)!}{x^{n-3}}\big\{-(n-1)(n-2)(n-3)+3n(n-2)(n-3)\\&\qquad-3n(n-1)(n-3)+n(n-1)(n-2)\big\}\\&=\frac{(-1)^{n-4}6(n-4)!}{x^{n-3}}\quad (n\geqq 4)\end{aligned}$$

また, $(x^3\log x)'=3x^2\log x+x^2,\ (x^3\log x)''=6x\log x+5x,$
$(x^3\log x)^{(3)}=6\log x+11.$

(9) $(x)' = 1$, $(x)^{(n)} = 0$, $(n \geqq 2)$, また, $(e^{-2x})^{(n)} = (-2)^n e^{-2x}$ より, ライプニッツの公式から

$$\begin{aligned}(xe^{-2x})^{(n)} &= x(e^{-2x})^{(n)} + n(x)'(e^{-2x})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}(x)''(e^{-2x})^{(n-2)} + \cdots \\ &= (-2)^n xe^{-2x} + (-2)^{n-1} ne^{-2x} \\ &= (-2)^{n-1}(-2x+n)e^{-2x}\end{aligned}$$

(10) $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$ より,

$$\left\{\frac{1}{x(x-1)}\right\}^{(n)} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

ここで, $\dfrac{1}{x-1}$ や $\dfrac{1}{x}$ の n 次導関数は, (6) と同様の方法で求めた.

(11) $\cos(-x) = \cos x$ より,

$$\{\cos(-x)\}^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$$

ここで, $\cos x$ の n 次導関数は (1) と同様の方法で求めた.

(12) $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ より,

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{(n)} = \left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad (n \geqq 2)$$

ここで, $\dfrac{1}{x-1}$ の n 次導関数は, (6), (10) と同様の方法で求めた. また, $n = 1$ のときは, $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

1.27.

(1) $(x^2 - 1)f(x) = 1$ より, ライプニッツの公式を用いて両辺を n 回微分すると

$$\begin{aligned}0 &= \{(x^2-1)f(x)\}^{(n)} \\ &= (x^2-1)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x)\end{aligned}$$

よって, $x = 0$ を代入すると, $f^{(n)}(0) = n(n-1)f^{(n-2)}(0)$ を得る. また, $f^{(0)}(0) = f(0) = -1$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$ から $f'(0) = 0$ である. よって, n が

奇数のとき, $n=2m-1$ とおくと,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= (2m-1)(2m-2)f^{(2m-3)}(0)\\
&= (2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)f^{(2m-5)}(0)\\
&= \cdots\\
&= (2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)\cdots(2m-2m+2)f^{(2m-2m+1)}(0)\\
&= n!f'(0) = 0
\end{aligned}$$

一方, n が偶数のとき, $n=2m$ とおくと,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= 2m(2m-1)f^{(2m-2)}(0)\\
&= 2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)f^{(2m-4)}(0)\\
&= \cdots\\
&= 2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)\cdots(2m-2m+1)f^{(2m-2m)}(0)\\
&= n!f(0) = -n!
\end{aligned}$$

まとめると, $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ -n! & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$

(2) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ より, $(1+x^2)f'(x) = 2x$. $n \geqq 3$ に対して, ライプニッツの公式を用いて両辺を $n-1$ 回微分すると

$$\begin{aligned}
0 &= \{(1+x^2)f(x)\}^{(n-1)}\\
&= (1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)
\end{aligned}$$

よって, $x=0$ を代入すると, $f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$ を得る. また, $f'(0)=0$, $f^{(2)}(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ から $f^{(2)}(0) = 2$ である. よって, n が奇数のとき, $n=2m-1$ とおくと,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= -(2m-2)(2m-3)f^{(2m-3)}(0)\\
&= (-1)^2(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)f^{(2m-5)}(0)\\
&= \cdots\\
&= (-1)^{m-1}(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)\cdots(2m-2m+1)f^{(2m-2m+1)}(0)\\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!f'(0) = 0
\end{aligned}$$

一方, n が偶数のとき, $n=2m$ とおくと,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= (-1)(2m-1)(2m-2)f^{(2m-2)}(0)\\
&= (-1)^2(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)f^{(2m-4)}(0)\\
&= \cdots\\
&= (-1)^{m-1}(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)\cdots(2m-2m+2)f^{(2m-2m+2)}(0)\\
&= (-1)^{\frac{n-2}{2}}(n-1)!f^{(2)}(0) = (-1)^{\frac{n-2}{2}}2(n-1)!
\end{aligned}$$

まとめると, $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}} 2(n-1)! & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$

1.28.

(1) $y' = \cos x$ より, $y = \sin x$ の点 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Longleftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

法線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Longleftrightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(2) $y' = \dfrac{1}{x}$ より, $y = \log x$ の点 $(1, 0)$ における接線の方程式は $y = x - 1$
法線の方程式は

$$y = -(x - 1) \Longleftrightarrow y = -x + 1$$

(3) $y' = -\dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}$ より, $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ の点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{4}{5} = -\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(1 + \frac{1}{4})^2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow y = -\frac{16}{25}x + \frac{28}{25}$$

法線の方程式は

$$y - \frac{4}{5} = \frac{25}{16}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow y = \frac{25}{16}x + \frac{3}{160}$$

(4) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より, $y = \tan x$ の点 $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$ における接線の方程式は

$$y - 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$$

法線の方程式は

$$y - 1 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\pi}{8}$$

(5) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1$ より, $y = \sqrt{x} + x - 1$ の点 $(1, 1)$ における接線の方程式は

$$y - 1 = \left(\frac{1}{2} + 1\right)(x - 1) \Longleftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

法線の方程式は

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Longleftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

(6) $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ より，$y = \dfrac{\sin x}{x}$ の点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2}{\pi}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{2}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}}{(\frac{\pi}{2})^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow y = -\frac{4}{\pi^2}x + \frac{4}{\pi}$$

法線の方程式は

$$y - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow y = \frac{\pi^2}{4}x + \frac{2}{\pi} - \frac{\pi^3}{8}$$

1.29. ロピタルの定理を使えばよい.

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sqrt{1+x^2}-1)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 1\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right)'}{(\frac{1}{x})'}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0\end{aligned}$$

(4) 最初に $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x^{\frac{1}{x}}$ を求める.

$$\lim_{x\to\infty}\log x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}e^{\log x^{\frac{1}{x}}} = e^0 = 1.$

(5) 最初に $\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ を求める.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\{\log(\cos x)\}'}{(x^2)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(-\frac{1}{2\cos x}\right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって, $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

(6) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos 3x}{\log\cos 2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\log\cos 3x)'}{(\log\cos 2x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3\sin 3x}{\cos 3x}}{-\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x\cos 2x}{2\sin 2x\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin 3x}{x}\cos 2x}{2\frac{\sin 2x}{x}\cos 3x} = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

(7) 最初に $\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ を求める.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left\{\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)\right\}'}{(x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^x\log 2+3^x\log 3}{2}}{\frac{2^x+3^x}{2}} = \frac{\log 2+\log 3}{2} = \log\sqrt{6}\end{aligned}$$

よって, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}e^{\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\log\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

(8) ロピタルの定理を 3 回使えばよい.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^3e^{-2x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^3)'}{(e^{2x})'}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2)'}{(2e^{2x})'}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{4e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(6x)'}{(4e^{2x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{8e^{2x}} = 0\end{aligned}$$

(9) 最初に $\lim_{x\to 0+}\log x^{\sin x}$ を求める.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\log x^{\sin x} &= \lim_{x\to 0+}\sin x\log x\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{(\log x)'}{(\frac{1}{\sin x})'} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = 0\end{aligned}$$

よって, $\lim_{x\to 0+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0+} e^{\log x^{\sin x}} = e^0 = 1$.

1.30.

(1) $y = x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ より,

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}} = \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

よって, $x = \frac{1}{2}$ のとき $y' = 0$ となる. また, 増減表は以下の通りである.

x	0		$\frac{1}{2}$		0
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

よって, $x = \frac{1}{2}$ のとき極大で, 極大値は $\frac{1}{2}$.

(2) $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$. $y' = \dfrac{-e^x + e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2} = -\dfrac{e^{2x}-1}{e^x(e^x+e^{-x})^2}$ より, $x = 0$ のとき $y' = 0$. よって, 増減表は以下の通りになる.

x		0	
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

よって, $x=0$ のとき極大で, 極大値は $\dfrac{1}{2}$.

(3) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ より

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0.$$

よって, $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ は単調増加関数で, 極値を持たない.

(4) $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x}=x+3+\dfrac{1}{x}$ より $y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$. よって, $x=\pm1$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	$\diagdown$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\diagdown$	$\searrow$	5	$\nearrow$

よって, $x=-1$ のとき極大で, 極大値は 1, $x=1$ のとき極小で, 極小値は 5.

(5) $y=\dfrac{\log x}{x}$ より $y'=\dfrac{1-\log x}{x^2}$. よって, $x=e$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下の通りである.

x	0		e	
y'	$\diagdown$	$+$	0	$-$
y	$\diagdown$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

よって, $x=e$ のとき極大で, 極大値は $\dfrac{1}{e}$.

(6) 最初に, 定義域は $x\geqq 0$ であることに注意しよう. $y=2x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}=2x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}$ より $y'=5x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{-1}{2}}=\dfrac{5x^2-1}{\sqrt{x}}$. よって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{5}}$	
y'	$\diagdown$	$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$	$-\frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$	$\nearrow$

よって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき極小で, 極小値は $-\dfrac{8}{5\sqrt[4]{5}}$.

(7) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ より $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. よって $x=\pm 1$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-1		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$

よって, $x=-1$ のとき極小で, 極小値は $-\dfrac{1}{2}$, $x=1$ のとき極大で, 極大値は $\dfrac{1}{2}$.

(8) $y=x-2\sqrt{x}$ より $y'=1-x^{\frac{-1}{2}}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$. よって, $x=1$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x	0		1	
y'	$\diagdown$	$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって, $x=1$ のとき極小で, 極小値は -1.

(9) $y=x-\log(x^2+1)$, $y'=1-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\geqq 0$. よって, 関数 $y=x-\log(x^2+1)$ は単調増加関数で極値を持たない.

(10) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ より $y'=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. よって, $x=0$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		0	
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$

よって, $x=0$ のとき極大で, 極大値は 1.

(11) $y=(2x-3)\sqrt{x}$ より $y'=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}(2x-3)\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{3(2x-1)}{2\sqrt{x}}$. よって, $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x	0		$\dfrac{1}{2}$	
y'	$\diagdown$	$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$

よって, $x=\dfrac{1}{2}$ のとき極小で, 極小値は $-\sqrt{2}$.

(12) $y=x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$ より $y'=2x-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$. よって, $x=\pm1$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-1		0		1	
y'	$-$	0	$+$	＼	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	3	$\nearrow$	＼	$\nearrow$	3	$\searrow$

よって, $x=\pm1$ のとき極小で, 極小値は 3.

(13) $y=x^x$. 両辺の対数をとると $\log y=x\log x$. ここで両辺を x で微分すると $\dfrac{y'}{y}=\log x+1$. よって $y'=x^x(\log x+1)$. よって, $x=\dfrac{1}{e}$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x	0		$\frac{1}{e}$	
y'	＼	$-$	0	$+$
y	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$

よって, $x=\dfrac{1}{e}$ のとき極小で, 極小値は $e^{-\frac{1}{e}}$. ($\lim\limits_{x\to0+}x^x=1$ に注意.)

(14) $y=x\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{-1}{2}}$ より $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}$. よって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
y'	＼	$-$	0	$+$
y	＼	$\searrow$	$\frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$	$\nearrow$

よって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極小で, 極小値は $\dfrac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$.

(15) $y=x^3+3x^2-9x+2$ より $y'=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$. よって, $x=-3,1$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-3		1	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	29	$\searrow$	-3	$\nearrow$

よって, $x=-3$ のとき極大で, 極大値は 29, $x=1$ のとき極小で, 極小値は -3.

(16) $y=2x^3-9x^2+12x$ より $y'=6x^2-18x+12=6(x-2)(x-1)$. よって, $x=1,2$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		1		2	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$

よって, $x=1$ のとき極大で, 極大値は 5, $x=2$ のとき極小で, 極小値は 4.

(17) $y=x^4-18x^2+3$ より $y'=4x^3-36x=4x(x^2-9)$. よって, $x=0,\pm3$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-3		0		3	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-78	$\nearrow$	3	$\searrow$	-78	$\nearrow$

よって, $x=\pm3$ のとき極小で, 極小値は -78, $x=0$ のとき極大で, 極大値は 3.

1.31.

(1) $y=x^2-6x-1$ より $y'=2x-6$, $y''=2>0$. よって, $x=3$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		3	
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$		$+$
y	$\searrow$	-10	$\nearrow$

(2) $y=-x^2+4x+3$ より $y'=-2x+4$, $y''=-2<0$. よって, $x=2$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		2	
y'	$+$	0	$-$
y''	$-$		$-$
y	$\nearrow$	7	$\searrow$

(3) $y=x^3$ より $y'=3x^2\geqq0$, $y''=6x$. よって, $x=0$ のとき $y'=y''=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		0	
y'	$+$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$

(4) $y=x^3-6x^2+5$ より $y'=3x^2-12x=3x(x-4)$, $y''=6x-12$. よって, $x=0,4$ のとき $y'=0$, $x=2$ のとき $y''=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		0		2		4	
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y	↗	5	↘	-11	↘	-27	↗

(5) $y=-x^3+3x^2+1$ より $y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$, $y''=-6x+6$. よって, $x=0,2$ のとき $y'=0$, $x=1$ のとき $y''=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		0		1		2	
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↘	1	↗	3	↘	5	↗

(6) $y=x^3+2x^2+x+3$ より $y'=3x^2+4x+1=(x+1)(3x+1)$, $y''=6x+4$. よって, $x=-1,-\dfrac{1}{3}$ のとき $y'=0$, $x=-\dfrac{2}{3}$ のとき $y''=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-1		$-\dfrac{2}{3}$		$-\dfrac{1}{3}$	
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y	↗	3	↘	$\dfrac{79}{27}$	↘	$\dfrac{77}{27}$	↗

(7) $y=x^4+2x^3+1$ より $y'=4x^3+6x^2=2x^2(2x+3)$, $y''=12x^2+12x=12x(x+1)$. よって, $x=-\dfrac{3}{2},0$ のとき $y'=0$, $x=-1,0$ のとき $y''=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		$-\dfrac{3}{2}$		-1		0	
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$
y''	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	$-\dfrac{11}{16}$	↗	0	↗	1	↗

(8) $y=-x^4+3x^2+1$ より $y'=-4x^3+6x=-2x(2x^2-3)$, $y''=-12x^2+6=-6(2x^2-1)$. よって, $x=0,\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ のとき $y'=0$, $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $y''=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		$-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↗	$\dfrac{13}{4}$	↘	$\dfrac{9}{4}$	↘	1	↗	$\dfrac{9}{4}$	↗	$\dfrac{13}{4}$	↘

(9) $y = x^4 - 14x^2 + 24x - 3$ より $y' = 4x^3 - 28x + 24 = 4(x-1)(x-2)(x+3)$, $y'' = 12x^2 - 28 = 4(3x^2 - 7)$. よって, $x = -3, 1, 2$ のとき $y' = 0$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ のとき $y'' = 0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-3		$-\sqrt{\dfrac{7}{3}}$		1		$\sqrt{\dfrac{7}{3}}$		2	
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y	↘	-120	↗	$-\dfrac{272}{9} - 8\sqrt{21}$	↗	8	↘	$-\dfrac{272}{9} + 8\sqrt{21}$	↘	5	↗

(10) $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ より, $y' = \dfrac{1}{3}(x^3 + x^2)^{\frac{-2}{3}}(3x^2 + 2x) = \dfrac{3x+2}{3x^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}}$ より, $x = -\dfrac{2}{3}$ のとき, $y' = 0$ また,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x^3 + x^2)^{-\frac{5}{3}}(3x^2 + 2x)^2 + \frac{1}{3}(x^3 + x^2)^{-\frac{2}{3}}(6x + 2) \\ &= -\frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}} < 0 \end{aligned}$$

よって, 増減表は以下の通りになる.

x	-1		$-\dfrac{2}{3}$		0		1
y'		$+$	0	$-$		$+$	
y''		$-$		$-$		$-$	
y	0	↗	$\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↘	0	↗	$\sqrt[3]{2}$

(11) $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ より, $y' = \dfrac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = -\dfrac{x-1}{(x+1)^3}$ より, $x = 1$ のとき $y' = 0$. また,

$$y'' = -\frac{(x+1)^3 - 3(x-1)(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{2(x-2)}{(x+1)^4}$$

より, $x=2$ のとき $y''=0$.

よって, 増減表は以下の通りになる.

x		-1		1		2	
y'	$-$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$-$		$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	$\dfrac{2}{9}$	$\searrow$

1.32.

(1) e^x と e^{-x} のマクローリン展開を 3 次まで求めて, 足し合わせればよい.

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)+\left(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)\right\}$$
$$=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots$$

よって, $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の 3 次までのマクローリン展開は $1+\dfrac{1}{2}x^2$.

(2) $$(x+3)^4=3^4+4\cdot 3^3x+\frac{4\cdot 3}{2!}3^2x^2+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}3\cdot x^3+x^4$$
$$=81+108x+54x^2+12x^3+x^4$$

よって, $(x+3)^4$ の 3 次までのマクローリン展開は $81+108x+54x^2+12x^3$.

(3) $$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(-x)^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(-x)^3+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\cdots$$

よって, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の 3 次までのマクローリン展開は $1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{5}{16}x^3$.

(4) $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots$ より,

$$\tan^{-1}x=\int_0^x(1-x^2+x^4+\cdots)dx=x-\frac{1}{3}x^3+\cdots$$

よって, $\tan^{-1}x$ の 3 次までのマクローリン展開は $x-\dfrac{1}{3}x^3$.

(5) $(x-1)^2=1-2x+x^2$ より, $(x-1)^2$ の 3 次までのマクローリン展開は $1-2x+x^2$.

(6) $2^x = e^{\log 2^x} = e^{(\log 2)x} = 1 + (\log 2)x + \dfrac{(\log 2)^2}{2!}x^2 + \dfrac{(\log 2)^3}{3!}x^3 + \cdots$ より,
2^x の 3 次までのマクローリン展開は $1 + (\log 2)x + \dfrac{(\log 2)^2}{2}x^2 + \dfrac{(\log 2)^3}{6}x^3$.

(7) e^x と $\cos x$ のマクローリン展開をそれぞれ掛け合わせて展開すればよい.

$$\begin{aligned}
e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{2!} + \cdots \\
&= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

よって, $e^x \cos x$ の 3 次までのマクローリン展開は $1 + x - \dfrac{1}{3}x^3$.

(8) $f(x) = \log(e^x + 1)$ とおく. $f(0) = \log 2$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ より}, \ f'(0) = \frac{1}{2} \\
f''(x) &= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \text{ より}, \ f''(0) = \frac{1}{4} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^3} \text{ より}, \ f^{(3)}(0) = 0
\end{aligned}$$

よって, $\log(e^x + 1)$ の 3 次までのマクローリン展開は $\log 2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}x^2$.

(9) $\dfrac{1}{1-x}$ のマクローリン展開を求め, x に $\sin x$ のマクローリン展開を代入すればよい.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - \sin x} &= 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \cdots \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + (x + \cdots)^2 + (x + \cdots)^3 + \cdots \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{6} + x^2 + x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

よって, $\dfrac{1}{1 - \sin x}$ の 3 次までのマクローリン展開は $1 + x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3$.

(10) $f(x) = e^{\cos x}$ とおく. $f(0) = e$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x e^{\cos x} \text{ より}, \ f'(0) = 0 \\
f''(x) &= -\cos x e^{\cos x} + \sin^2 x e^{\cos x} \text{ より}, \ f''(0) = -e \\
f^{(3)}(x) &= \sin x e^{\cos x}\left(1 + \cos x - \sin^2 x\right) \text{ より}, \ f^{(3)}(0) = 0
\end{aligned}$$

よって, $e^{\cos x}$ の 3 次までのマクローリン展開は $e - \dfrac{e}{2}x^2$.

(11) $(e^x-1)^4$ を展開して, $e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}$ のマクローリン展開をそれぞれ代入すればよい.

$$\begin{aligned}
&(e^x-1)^4\\
&=1-4e^x+6e^{2x}-4e^{3x}+e^{4x}\\
&=1-4\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)+6\left(1+2x+\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^3}{3!}x^3+\cdots\right)\\
&\qquad-4\left(1+3x+\frac{3^2}{2!}x^2+\frac{3^3}{3!}x^3+\cdots\right)+\left(1+4x+\frac{4^2}{2!}x^2+\frac{4^3}{3!}x^3+\cdots\right)\\
&=0+\cdots
\end{aligned}$$

よって, $(e^x-1)^4$ の 3 次までのマクローリン展開は 0.

(12) $f(x)=\tan x$ とおく. $f(0)=0$.

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{\cos^2 x}\ \text{より},\ f'(0)=1\\
f''(x)&=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\ \text{より},\ f''(0)=0\\
f^{(3)}(x)&=\frac{2\cos^2 x+6\sin^2 x}{\cos^4 x}\ \text{より},\ f^{(3)}(0)=2
\end{aligned}$$

よって, $\tan x$ の 3 次までのマクローリン展開は $x+\dfrac{1}{3}x^3$.

1.33.

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$ より,

$$e^{0.1}=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{200}+\frac{1}{6000}=\frac{6631}{6000}=1.105$$

また, 誤差は

$$\sup_{x\in[0,0.1]}\frac{|e^x|}{4!}\cdot 0.1^4\le\frac{3}{4!}\cdot 0.1^4=\frac{1}{80000}=0.0000125$$

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$ より,

$$\sin 0.1=\frac{1}{10}-\frac{1}{6000}=\frac{599}{6000}=0.1$$

また, 誤差は

$$\sup_{x\in[0,0.1]}\frac{|\sin x^x|}{4!}\cdot 0.1^4\le\frac{1}{4!}\cdot 0.1^4=\frac{1}{240000}=0.00000417$$

1.34.

(1) $\sin x$ のマクローリン展開に x^2 を掛ければよい.

$$
\begin{aligned}
x^2\sin x &= x^2\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{(2n-3)!}x^{2n-3}+\cdots\right)\\
&= x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}-\frac{x^9}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{(2n-3)!}x^{2n-1}+\cdots
\end{aligned}
$$

よって, $x^2\sin x$ の $2n$ 次までのマクローリン展開は

$$
x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}-\frac{x^9}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{(2n-3)!}x^{2n-1}
$$

(2) e^x のマクローリン展開において, x を $2x$ に置き換えればよい.

$$
\begin{aligned}
e^{2x} &= 1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(2x)^n}{n!}+\cdots\\
&= 1+2x+\frac{2^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{2^n}{n!}x^n+\cdots
\end{aligned}
$$

よって, e^{2x} の n 次までのマクローリン展開は

$$
1+2x+\frac{2^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{2^n}{n!}x^n
$$

(3) $\dfrac{x}{1-x^2}$ のマクローリン展開に x を掛ければよい.

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{1-x^2} &= x\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}+\cdots\right)\\
&= x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n-1}+\cdots
\end{aligned}
$$

よって, $\dfrac{x}{1-x^2}$ の $2n$ 次までのマクローリン展開は

$$
x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n-1}
$$

(4) $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots$ より,

$$
\begin{aligned}
\tan^{-1}x &= \int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx\\
&= \int_0^x\left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots\right)dx\\
&= \left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\right]_0^x\\
&= x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots
\end{aligned}
$$

よって, $\tan^{-1}x$ の $2n+1$ 次までのマクローリン展開は

$$
x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}
$$

(5) $3^x = e^{(\log 3)x} = 1 + (\log 3)x + \dfrac{(\log 3)^2}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{(\log 3)^n}{n!}x^n + \cdots$. よって, 3^x の n 次までのマクローリン展開は

$$1 + (\log 3)x + \frac{(\log 3)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(\log 3)^n}{n!}x^n$$

1.35.

(1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots) - (1 + x^2 + x^4 + \cdots)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{3}{2} - \frac{23}{24}x^2 + \cdots\right) = -\frac{3}{2}$$

(2)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x\sqrt{x+1}}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots)}{x^3} - \frac{x(1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \cdots)}{x^3}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{24}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + \cdots}{x^3} = \frac{7}{24}$$

(3)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1 + x + x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots}{1 + x + x^2}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}x + \cdots}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} = +\infty$$

(4)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan^{-1} x}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots) - (x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \cdots)}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} - \frac{23}{120}x^2 + \cdots\right) = \frac{1}{6}$$

(5)
$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1 - (\log 2)x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + (\log 2)x + \frac{(\log 2)^2}{2!}x^2 + \frac{(\log 2)^3}{3!}x^3 \cdots - 1 - (\log 2)x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{(\log 2)^2}{2} + \frac{(\log 2)^3}{6}x \cdots\right\} = \frac{(\log 2)^2}{2}$$

(6)
$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\log(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\{1 + (\log 2)x + \frac{(\log 2)^2}{2}x^2 + \cdots\} - 1}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log 2 + \frac{(\log 2)^2}{2}x + \cdots}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \cdots} = \log 2$$

1.36. e が有理数だと仮定して矛盾を導く. e が有理数だと仮定すると, $e = \dfrac{k}{m}$ とおくことができる. ここで, $\dfrac{k}{m}$ は既約分数であると仮定する.

e^x の n 次までのマクローリン展開から

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\alpha}{(n+1)!}x^{n+1}$$

をみたす α が 0 と x の間に存在する. これより,

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\alpha}{(n+1)!}$$

となる $\alpha \in [0,1]$ が存在する. これより,

$$n!e = n!\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \frac{e^\alpha}{n+1}$$

を得る. ここで, $n \geqq m$ とすれば, 左辺は整数になる. これより右辺も整数である. すなわち, $n \geqq m$ となる全ての n に対して, $\dfrac{e^\alpha}{n+1}$ は整数となる. ところで, $\alpha \in [0,1]$ であったので, $1 \leqq e^\alpha \leqq 3$, すなわち,

$$\frac{1}{n+1} \leqq \frac{e^\alpha}{n+1} \leqq \frac{3}{n+1}$$

が成り立つ. これより, 全ての $n \geqq m$ に対して, $\dfrac{e^\alpha}{n+1}$ が整数になることはない. よって, $\dfrac{e^\alpha}{n+1}$ が整数であることに矛盾するので, e は有理数ではない.

例題と演習で学ぶ　微分積分学　演習問題解答
(第 6 刷にも対応)

第 2 章

2.1. C を積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(4) $\displaystyle\int (x+1)^3 dx = \int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)dx = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2}dx = \int \frac{1}{3^2+x^2}dx = \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx = \log|\sin x| + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) + C$

(8) $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}}dx = \int \left(3x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{7}{6}}\right)dx = 2x^{\frac{3}{2}} + 24x^{-\frac{1}{6}} + C$

(9)
$$\begin{aligned}\int x^2\left(x - \frac{2}{x}\right)^3 dx &= \int x^2\left(x^3 - 6x + \frac{12}{x} - \frac{8}{x^3}\right)dx \\ &= \int \left(x^5 - 6x^3 + 12x - \frac{8}{x}\right)dx \\ &= \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{2}x^4 + 6x^2 - 8\log|x| + C\end{aligned}$$

(10) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}dx = \int \left(2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-2}\right)dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-1} + C$

(11)
$$\begin{aligned}\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}dx = \int \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}}dx &= \int \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)dx \\ &= x^{\frac{1}{2}} - \log|x| - x^{-\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

(12) $\displaystyle\int x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

(13) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

(14) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2}dx = \int (2x^{-1}+x^{-2})dx = 2\log|x| - x^{-1} + C$

(15) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{\sqrt{x}}dx = \int \left(3x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = 2x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + C$

(16)
$$\begin{aligned}\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}dx &= \int \frac{x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \int \left(x - 3x^{\frac{1}{2}} + 3 - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 3x - 2x^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

(17) $\displaystyle\int (3\sin x - 4\cos x)dx = -3\cos x - 4\sin x + C$

(18) $\displaystyle\int \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)dx = \tan x - \sin x + C$

(19) $\displaystyle\int (e^x - 2^x)dx = e^x - \frac{2^x}{\log 2} + C$

(20) $\displaystyle\int \left(x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^2 dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{7}{12}} + x^{\frac{2}{3}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{24}{19}x^{\frac{19}{12}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

2.2. C を積分定数とする.

(1)
$$\begin{aligned}\int x\sin x dx = \int x(-\cos x)'dx &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int xe^{-x}dx = \int x(-e^{-x})'dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + C$

(3)
$$\begin{aligned}\int (x+3)\cos 2x dx &= \int (x+3)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx \\ &= \frac{x+3}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx \\ &= \frac{x+3}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\int x\log x dx &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\int \log(x+1)dx &= \int (x+1)'\log(x+1)dx \\ &= (x+1)\log(x+1) - \int dx = (x+1)\log(x+1) - x + C\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-2)e^x + C$

(7) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C$

(8) $$\begin{aligned}\int (1-2x)\sin x dx &= (1-2x)(-\cos x) - 2\int \cos x dx \\ &= (2x-1)\cos x - 2\sin x + C\end{aligned}$$

(9) $\displaystyle\int x a^x dx = x\frac{a^x}{\log a} - \frac{1}{\log a}\int a^x dx = x\frac{a^x}{\log a} - \frac{a^x}{(\log a)^2} + C$

(10) $\displaystyle I = \int e^x \cos x dx$ とおく．

$$\begin{aligned}I = \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x dx\right) \\ &= e^x(\sin x + \cos x) - I\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$

(11) $$\begin{aligned}\int \sin^3 x dx &= \int \sin x \cdot \sin^2 x dx \\ &= -\cos x \sin^2 x + \int \cos x \cdot 2\sin x \cos x dx \\ &= -\cos x \sin^2 x + 2\int \sin x(1-\sin^2 x)dx \\ &= -\cos x \sin^2 x - 2\cos x - 2\int \sin^3 x dx\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\int \sin^3 x dx = -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + C$

(12) $$\begin{aligned}\int x\log(x^2+1)dx &= \int \left(\frac{x^2+1}{2}\right)' \log(x^2+1)dx \\ &= \frac{x^2+1}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\int 2x dx \\ &= \frac{x^2+1}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

(13) $I = \int \sin^5 x dx$ とおく.

$$
\begin{aligned}
I = \int \sin^5 x dx &= \int \sin x \sin^4 x dx \\
&= -\cos x \sin^4 x + \int \cos x \cdot 4 \sin^3 x \cos x dx \\
&= -\cos x \sin^4 x + 4 \int (1 - \sin^2 x) \sin^3 x dx \\
&= -\cos x \sin^4 x + 4 \int \sin^3 x dx - 4I
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\int \sin^5 x dx &= -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x + \frac{4}{5} \int \sin^3 x dx \\
&= -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x + \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x \right) + C \\
&= -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x - \frac{4}{15} \sin^2 x \cos x - \frac{8}{15} \cos x + C
\end{aligned}
$$

(14) $\displaystyle \int x e^{x+1} dx = x e^{x+1} - \int e^{x+1} dx = (x-1) e^{x+1} + C$

(15)
$$
\begin{aligned}
\int x \log(x+2) dx &= \int \left(\frac{x^2 - 4}{2} \right)' \log(x+2) dx \\
&= \frac{x^2 - 4}{2} \log(x+2) - \frac{1}{2} \int (x^2 - 4) \cdot \frac{1}{x+2} dx \\
&= \frac{x^2 - 4}{2} \log(x+2) - \frac{1}{2} \int (x-2) dx \\
&= \frac{x^2 - 4}{2} \log(x+2) - \frac{1}{4} (x^2 - 4x) + C
\end{aligned}
$$

(16)
$$
\begin{aligned}
\int e^x \log(e^x + 1) dx &= \int (e^x + 1)' \log(e^x + 1) dx \\
&= (e^x + 1) \log(e^x + 1) dx - \int (e^x + 1) \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\
&= (e^x + 1) \log(e^x + 1) dx - \int e^x dx \\
&= (e^x + 1) \log(e^x + 1) dx - e^x + C
\end{aligned}
$$

(17)
$$
\begin{aligned}
\int x \sin(x-1) dx &= -x \cos(x-1) + \int \cos(x-1) dx \\
&= -x \cos(x-1) + \sin(x-1)
\end{aligned}
$$

(18) $\displaystyle\int x^5 \log x dx = \frac{1}{6}x^6 \log x - \frac{1}{6}\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 \log x - \frac{1}{36}x^6 + C$

(19) $\displaystyle I = \int \cos^3 x dx$ とおく.

$$\begin{aligned} I = \int \cos x \cdot \cos^2 x dx &= \sin x \cos^2 x - \int \sin x \cdot 2\cos x(-\sin x)dx \\ &= \sin x \cos^2 x + 2\int \cos x dx - 2\int \cos^3 x dx \\ &= \sin x \cos^2 x + 2\sin x - 2I \end{aligned}$$

よって, $\displaystyle\int \cos^3 x dx = \frac{1}{3}\sin x \cos^2 x + \frac{2}{3}\sin x + C.$

(20) 部分積分の計算を 3 回行えばよい.

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin x dx &= -x^3 \cos x + \int 3x^2 \cos x dx \\ &= -x^3 \cos x + 3\left(x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx\right) \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6\left(-x \cos x + \int \cos x dx\right) \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C \end{aligned}$$

2.3.

(1) $\log x = t$ とおくと, $\displaystyle\frac{1}{x}dx = dt$. よって,

$$\int \frac{1}{x \log x}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \log|\log x| + C$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1}dx$. ここで, $x + 1 = t$ とおくと, $dx = dt$. よって,

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}dx = \int \frac{1}{t^2 + 1}dt = \tan^{-1} t + C = \tan^{-1}(x+1) + C$$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{2x}{(x-1)^2+4}dx$. ここで, $x-1=t$ とおくと, $dx=dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2-2x+5}dx &= \int \frac{2t+2}{t^2+4}dt \\ &= \int \frac{2t}{t^2+4}dt + \int \frac{2}{t^2+4}dt \\ &= \log(t^2+4) + \tan^{-1}\frac{t}{2} + C \\ &= \log(x^2-2x+5) + \tan^{-1}\frac{x-1}{2} + C\end{aligned}$$

(4) $2x=t$ とおくと, $2dx=dt$, すなわち $dx=\dfrac{1}{2}dt$. よって,

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

(5) $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx$. ここで, $2x=t$ とおくと, $2dx=dt$, すなわち $dx=\dfrac{1}{2}dt$. よって,

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos t}{2}dt = \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(6) $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx$. ここで, $2x=t$ とおくと, $2dx=dt$, すなわち $dx=\dfrac{1}{2}dt$. よって,

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos t}{2}dt = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(7) $3x=t$ とおくと, $3dx=dt$, すなわち, $dx=\dfrac{1}{3}dt$. よって,

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

(8) $\sin x = t$ とおくと, $\cos x dx = dt$. よって,

$$\int \cos x e^{\sin x}dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

(9) $3x=t$ とおくと, $3dx=dt$, すなわち, $dx=\dfrac{1}{3}dt$. よって,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt = \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3}{2}x + C$$

(10) $\log(1+x^2)=t$ とおくと, $\dfrac{2x}{1+x^2}dx=dt$, すなわち, $\dfrac{x}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}dt$. よって,

$$\int \frac{x\log(1+x^2)}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int tdt=\frac{1}{4}t^2+C=\frac{1}{4}\left\{\log(1+x^2)\right\}^2+C$$

(11) $1-x^2=t$ とおくと, $-2xdx=dt$, すなわち, $xdx=-\dfrac{1}{2}dt$. よって,

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt=-\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

(12) $3-x=t$ とおくと, $-dx=dt$, すなわち $dx=-dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(3-x)^2}dx &= -\int \frac{(3-t)^2}{t^2}dt\\ &= -\int \frac{t^2-6t+9}{t^2}dt\\ &= -\int \left(1-\frac{6}{t}+\frac{9}{t^2}\right)dt\\ &= -t+6\log|t|+\frac{9}{t}+C=x-3+6\log|x-3|+\frac{9}{x-3}+C\end{aligned}$$

(13) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}dx=\log(1+e^x)+C$

(14) $3x+2=t$ とおくと, $3dx=dt$, すなわち, $dx=\dfrac{1}{3}dt$. よって,

$$\int (3x+2)^4dx=\frac{1}{3}\int t^4dt=\frac{1}{15}t^5+C=\frac{1}{15}(3x+2)^5+C$$

(15) $2-x=t$ とおくと, $-dx=dt$, すなわち, $dx=-dt$. よって,

$$\int \sqrt{2-x}dx=-\int \sqrt{t}dt=-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}+C$$

(16) $\displaystyle\int \frac{1}{4x+1}dx=\frac{1}{4}\int \frac{(4x+1)'}{4x+1}dx=\frac{1}{4}\log|4x+1|+C$

(17) $5x+2=t$ とおくと, $5dx=dt$, すなわち, $dx=\dfrac{1}{5}dt$. よって,

$$\int \frac{1}{(5x+2)^3}dx=\frac{1}{5}\int \frac{1}{t^3}dt=-\frac{1}{10t^2}+C=-\frac{1}{10(5x+2)^2}+C$$

(18) $4x+1=t$ とおくと, $4dx=dt$, すなわち $dx=\dfrac{1}{4}dt$. よって,

$$\int e^{4x+1}dx=\frac{1}{4}\int e^tdt=\frac{1}{4}e^t+C=\frac{1}{4}e^{4x+1}+C$$

(19) $\dfrac{\pi}{3}-2x=t$ とおくと, $-2dx=dt$, すなわち, $dx=-\dfrac{1}{2}dt$. よって,

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)dx = -\frac{1}{2}\int \sin t dt = \frac{1}{2}\cos t + C = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+C$$

(20) $2x-1=t$ とおくと, $x=\dfrac{t+1}{2}$. また $2dx=dt$, すなわち, $dx=\dfrac{1}{2}dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x-1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{2}\cdot\sqrt{t}dt\\ &= \frac{1}{4}\int\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt\\ &= \frac{1}{10}t^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{1}{10}(2x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{1}{30}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\left\{3(2x-1)+5\right\}+C\\ &= \frac{1}{15}(2x-1)^{\frac{3}{2}}(3x+1)+C\end{aligned}$$

(21) $x+1=t$ とおくと, $x=t-1$. また $dx=dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}dx &= \int (t-1)\sqrt{t}dt\\ &= \int\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt\\ &= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{15}t^{\frac{3}{2}}(3t-5)+C\\ &= \frac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}(3x-2)+C\end{aligned}$$

(22) $3x-1=t$ とおくと, $3dx=dt$, すなわち $dx=\dfrac{1}{3}dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{3x-1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}(t+1)}{t}dt\\ &= \frac{1}{9}\int\left(1+\frac{1}{t}\right)dt\\ &= \frac{1}{9}t+\log|t|+C\\ &= \frac{1}{9}(3x-1)+\frac{1}{9}\log|3x-1|+C\end{aligned}$$

(23) $x-1=t$ とおくと, $dx=dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx &= \int \frac{(t+1)^2}{\sqrt{t}}dt \\ &= \int \left(t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)dt \\ &= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+C \\ &= \frac{2}{15}t^{\frac{1}{2}}\left(3t^2+10t+15\right)+C \\ &= \frac{2}{15}(3x^2+4x+8)\sqrt{x-1}+C\end{aligned}$$

(24) $x^2+1=t$ とおくと, $2xdx=dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2+1}dx &= \int \sqrt{t}dt \\ &= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C \\ &= \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

(25) $x^3-1=t$ とおくと, $3x^2dx=dt$, すなわち $x^2dx=\frac{1}{3}dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^3-1}dx &= \frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt \\ &= \frac{2}{9}t^{\frac{3}{2}}+C \\ &= \frac{2}{9}(x^3-1)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

(26) $\sin x=t$ とおくと, $\cos x dx=dt$. よって,

$$\int \sin^3 x\cos x dx = \int t^3dt = \frac{1}{4}t^4+C = \frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

(27) $2x-3=t$ とおくと, $2dx=dt$, すなわち $dx=\frac{1}{2}dt$. よって,

$$\int \sqrt[3]{(2x-3)^2}dx = \frac{1}{2}\int t^{\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+C = \frac{3}{10}(2x-3)^{\frac{5}{3}}+C$$

(28) $3x=t$ とおくと, $3dx=dt$, すなわち $dx=\frac{1}{3}dt$. よって,

$$\int \frac{1}{\cos^2 3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{3}\tan t+C = \frac{1}{3}\tan 3x+C$$

(29) $2x+3=t$ とおくと, $2dx=dt$, すなわち $dx=\dfrac{1}{2}dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int x(2x+3)^3dx &= \frac{1}{2}\int \frac{t-3}{2}t^3dt\\ &= \frac{1}{4}\int (t^4-3t^3)dt\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{3}{4}t^4\right)+C\\ &= \frac{1}{80}t^4(4t-15)+C\\ &= \frac{1}{80}(8x-3)(2x+3)^4+C\end{aligned}$$

(30) $2x+1=t$ とおくと, $2dx=dt$, すなわち $dx=\dfrac{1}{2}dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{t-2}{\sqrt{t}}dt\\ &= \frac{1}{2}\int (t^{\frac{1}{2}}-2t^{-\frac{1}{2}})dt\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-4t^{\frac{1}{2}}\right)+C\\ &= \frac{t^{\frac{1}{2}}}{3}(t-6)+C\\ &= \frac{1}{3}(2x-5)\sqrt{2x+1}+C\end{aligned}$$

(31) $4-3x^2=t$ とおくと, $-6xdx=dt$, すなわち $xdx=-\dfrac{1}{6}dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}dx &= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt\\ &= -\frac{1}{6}\int t^{-\frac{1}{2}}dt\\ &= -\frac{1}{3}t^{\frac{1}{2}}+C\\ &= -\frac{1}{3}(4-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

(32) $3x^3=t$ とおくと, $9x^2dx=dt$, すなわち, $x^2dx=\dfrac{1}{9}dt$. よって,

$$\int x^2e^{3x^3}dx=\frac{1}{9}\int e^tdt=\frac{1}{9}e^t+C=\frac{1}{9}e^{3x^3}+C$$

2.4.

(1) $\cos x = t$ とおくと, $-\sin x dx = dt$, すなわち $\sin x dx = -dt$. よって,

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C$$

(2) $x^2 = t$ とおくと, $2x dx = dt$. よって,

$$\int \frac{2x}{x^4+1} dx = \int \frac{1}{t^2+1} dt = \tan^{-1} t + C = \tan^{-1} x^2 + C$$

(3) $\sqrt{e^x - 1} = t$ とおくと, $e^x = t^2 + 1$, $\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} dx = dt$, すなわち, $dx = \dfrac{2t}{t^2+1} dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x - 1} dx &= \int t \cdot \frac{2t}{t^2+1} dt \\ &= 2\int \frac{t^2}{t^2+1} dt \\ &= 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \\ &= 2t - 2\tan^{-1} t + C \\ &= 2\sqrt{e^x-1} - 2\tan^{-1}\sqrt{e^x-1} + C\end{aligned}$$

(4) $x = \sin t$ とおくと, $dx = \cos t dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \\ &= \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C \\ &= \frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\sin(\sin^{-1} x)\cos(\sin^{-1} x) + C \\ &= \frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

(5) $\sin x = t$ とおくと, $\cos x dx = dt$. よって,

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(6) $\cos x = t$ とおくと, $-\sin x dx = dt$, すなわち $\sin x dx = -dt$. よって,

$$\int \sqrt{\cos x} \sin x dx = -\int \sqrt{t} dt = -\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} \cos^{\frac{3}{2}} x + C$$

2.5.

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)(x+5)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+5}$ とおく.
両辺を $(x+1)(x-2)(x+5)$ 倍すると,

$$1 = A(x-2)(x+5) + B(x+1)(x+5) + C(x+1)(x-2)$$

この式に $x = -1$ を代入すると, $A = -\dfrac{1}{12}$, $x = 2$ を代入すると, $B = \dfrac{1}{21}$, $x = -5$ を代入すると, $C = \dfrac{1}{28}$. よって,

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+5)} = -\frac{1}{12(x+1)} + \frac{1}{21(x-2)} + \frac{1}{28(x+5)}$$

(2) $\dfrac{3x-2}{x(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x-2}$ とおく.
両辺を $x(x-1)(x-2)$ 倍すると,

$$3x - 2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$

この式に $x = 0$ を代入すると, $A = -1$, $x = 1$ を代入すると, $B = -1$, $x = 2$ を代入すると, $C = 2$. よって,

$$\frac{3x-2}{x(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

(3) $\dfrac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とおく.
両辺を $(x-1)(x^2+1)$ 倍すると,

$$2x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

この式に $x = 1$ を代入すると, $A = 1$, $x = 0$ を代入すると, $0 = A - C$ より $C = 1$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $0 = A + B$ より $B = -1$. よって,

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+1}$$

(4) $\dfrac{2x+1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とおく.
両辺を $x(x^2+1)$ 倍すると,

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= A(x^2+1) + (Bx+C)x \\ &= (A+B)x^2 + Cx + A \end{aligned}$$

これより, $A = 1$, $C = 2$, $B = -1$. よって,

$$\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x-2}{x^2+1}$$

(5) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とおく.
両辺を $(x+1)(x^2+1)$ 倍すると,

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

この式に $x = -1$ を代入すると, $A = \dfrac{1}{2}$, $x = 0$ を代入すると, $1 = A + C$ より $C = \dfrac{1}{2}$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $0 = A + B$ より $B = -\dfrac{1}{2}$. よって,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)}$$

(6) $\dfrac{x+1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とおく.
両辺を $x(x^2+1)$ 倍すると,

$$\begin{aligned} x+1 &= A(x^2+1) + (Bx+C)x \\ &= (A+B)x^2 + Cx + A \end{aligned}$$

これより, $A = 1$, $C = 1$, $B = -1$. よって,

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$$

(7) $\dfrac{2x-1}{(x+2)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とおく.
両辺を $(x+2)(x^2+1)$ 倍すると,

$$2x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)$$

この式に $x = -2$ を代入すると, $A = -1$, $x = 0$ を代入すると, $-1 = A + 2C$ より $C = 0$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $0 = A + B$ より $B = 1$. よって,

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x^2+1)} = -\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2+1}$$

(8) $\dfrac{5x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とおく.
両辺を $(x+1)(x^2+1)$ 倍すると,

$$5x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

この式に $x = -1$ を代入すると, $A = -2$, $x = 0$ を代入すると, $1 = A + C$ より $C = 3$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $0 = A + B$ より $B = 2$. よって,

$$\frac{5x+1}{(x+1)(x^2+1)} = -\frac{2}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2+1}$$

(9) $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$ とおく.
両辺を $x(x+1)^2$ 倍すると,

$$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

この式に $x=0$ を代入すると, $A=1$, $x=-1$ を代入すると, $C=-1$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $0=A+B$ より $B=-1$. よって,

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

(10) $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2}$ とおく.
両辺を $(x-1)(x-2)^2$ 倍すると,

$$x = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

この式に $x=1$ を代入すると, $A=1$, $x=2$ を代入すると, $C=2$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $0=A+B$ より $B=-1$. よって,

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

(11) $\dfrac{x-7}{(x+2)(x-1)^2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$ とおく.
両辺を $(x+2)(x-1)^2$ 倍すると,

$$x-7 = A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)$$

この式に $x=1$ を代入すると, $C=-2$, $x=-2$ を代入すると, $A=-1$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $0=A+B$ より $B=1$. よって,

$$\frac{x-7}{(x+2)(x-1)^2} = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$$

(12) $\dfrac{x+2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x+1} + \dfrac{D}{(x+1)^2}$
とおく. 両辺を $(x^2-1)^2$ 倍すると,

$$x+2 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2$$

この式に $x=1$ を代入すると, $B=\dfrac{3}{4}$, $x=-1$ を代入すると, $D=\dfrac{1}{4}$, $x=0$ を代入すると, $-A+B+C+D=2$ より, $-A+C=1$. 両辺の x^3 の係数を比較すると, $0=A+C$. これより, $A=-\dfrac{1}{2}$, $C=\dfrac{1}{2}$. よって,

$$\frac{x+2}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{4(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}$$

(13) $\dfrac{x^2}{x^4-1}=\dfrac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおく.
両辺を x^4-1 倍すると,

$$x^2=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$$

この式に $x=1$ を代入すると, $A=\dfrac{1}{4}$, $x=-1$ を代入すると, $B=-\dfrac{1}{4}$, $x=0$ を代入すると, $A-B-D=0$ より, $D=\dfrac{1}{2}$. 両辺の x^3 の係数を比較すると, $A+B+C=0$ より, $C=0$. よって,

$$\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{2(x^2+1)}$$

(14) $\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおく.
両辺を x^4-1 倍すると,

$$1=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$$

この式に $x=1$ を代入すると, $A=\dfrac{1}{4}$, $x=-1$ を代入すると, $B=-\dfrac{1}{4}$, $x=0$ を代入すると, $A-B-D=1$ より, $D=-\dfrac{1}{2}$. 両辺の x^3 の係数を比較すると, $A+B+C=0$ より, $C=0$. よって,

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}$$

(15) $\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ とおく.
両辺を x^3-1 倍すると,

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$$

この式に $x=1$ を代入すると, $A=\dfrac{1}{3}$, $x=0$ を代入すると, $A-C=1$ より, $C=-\dfrac{2}{3}$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $A+B=0$ より, $B=-\dfrac{1}{3}$. よって,

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$$

(16) $\dfrac{3x^3+3x^2+13x+5}{x(x+1)(x^2+2x+5)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$ とおく.
両辺を $x(x+1)(x^2+2x+5)$ 倍すると,

$$\begin{aligned}&3x^3+3x^2+13x+5\\&\quad=A(x+1)(x^2+2x+5)+Bx(x^2+2x+5)+(Cx+D)x(x+1)\end{aligned}$$

この式に $x=0$ を代入すると, $A=1$, $x=-1$ を代入すると, $B=2$. 両辺の x^3 の係数を比較すると, $A+B+C=3$ より, $C=0$. $x=1$ を代入すると, $8A+4B+C+D=12$ より, $D=-4$.

よって,

$$\frac{3x^3+3x^2+13x+5}{x(x+1)(x^2+2x+5)}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{4}{x^2+2x+5}$$

(17) $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$ とおく.
両辺を $(x^2+1)^2$ 倍すると,

$$\begin{aligned} x^2 &= (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D \\ &= Ax^3+Bx^2+(A+C)x+B+D \end{aligned}$$

これより, $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=-1$. よって,

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

(18) $\dfrac{2x^2-5x-4}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$ とおく.
両辺を $(x+1)^2(x^2-x+1)$ 倍すると,

$$2x^2-5x-4=A(x+1)(x^2-x+1)+B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)^2$$

この式に $x=-1$ を代入すると, $B=1$, $x=0$ を代入すると, $A+B+D=-4$ より, $A+D=-5$. $x=1$ を代入すると, $A+2C+2D=-4$. 両辺の x^3 の係数を比較すると, $0=A+C$. この連立方程式を解くと, $A=-2$, $C=2$, $D=-3$. よって,

$$\frac{2x^2-5x-4}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2x-3}{x^2-x+1}$$

(19) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+3}$ とおく.
両辺を $(x^2+1)(x^2+3)$ 倍すると,

$$\begin{aligned} 1 &= (Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+1) \\ &= (A+C)x^3+(B+D)x^2+(3A+C)x+(3B+D) \end{aligned}$$

これより, $A+C=0$, $3A+C=0$, $B+D=0$, $3B+D=1$ から $A=C=0$, $B=\dfrac{1}{2}$, $D=-\dfrac{1}{2}$. よって,

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}=\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2(x^2+3)}$$

(20) $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$ とおく.
両辺を x^3+1 倍すると,

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

この式に $x=-1$ を代入すると, $A=\dfrac{1}{3}$, $x=0$ を代入すると, $A+C=1$ より, $C=\dfrac{2}{3}$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $0=A+B$ より $B=-\dfrac{1}{3}$.
よって,

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$$

(21) $\dfrac{x^2}{x^3+1} = \dfrac{x^2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$ とおく.
両辺を x^3+1 倍すると,

$$x^2 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

この式に $x=-1$ を代入すると, $A=\dfrac{1}{3}$, $x=0$ を代入すると, $A+C=0$ より, $C=-\dfrac{1}{3}$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $1=A+B$ より $B=\dfrac{2}{3}$.
よって,

$$\frac{x^2}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}$$

(22) $\dfrac{2x+1}{x(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$ とおく.
両辺を $x(x-1)(x+2)$ 倍すると,

$$2x+1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

この式に $x=0$ を代入すると, $A=-\dfrac{1}{2}$, $x=1$ を代入すると, $B=1$, $x=-2$ を代入すると, $C=-\dfrac{1}{2}$. よって,

$$\frac{2x+1}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x+2)}$$

(23) $\dfrac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$ とおく.
両辺を $(x^2+1)^2$ 倍すると,

$$\begin{aligned} x^3+x^2+2x+1 &= (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B + D \end{aligned}$$

これより, $A=B=C=1$, $D=0$. よって,

$$\frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

(24) $\dfrac{x+1}{x^2(x^2+4x+5)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4x+5}$ とおく.
両辺を $x^2(x^2+4x+5)$ 倍すると,

$$\begin{aligned} x+1 &= Ax(x^2+4x+5) + B(x^2+4x+5) + (Cx+D)x^2 \\ &= (A+C)x^3 + (4A+B+D)x^2 + (5A+4B)x + 5B \end{aligned}$$

これより, $B=\dfrac{1}{5}$, $A=\dfrac{1}{25}$, $D=-\dfrac{9}{25}$, $C=-\dfrac{1}{25}$. よって,

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+4x+5)} = \frac{1}{25x} + \frac{1}{5x^2} - \frac{x+9}{25(x^2+4x+5)}$$

(25) $\dfrac{x^2+6x+11}{(x+2)^3} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{C}{(x+2)^3}$ とおく.
両辺を $(x+2)^3$ 倍すると,

$$\begin{aligned} x^2+6x+11 &= A(x+2)^2 + B(x+2) + C \\ &= Ax^2 + (4A+B)x + (4A+2B+C) \end{aligned}$$

これより, $A=1$, $B=2$, $C=3$. よって,

$$\frac{x^2+6x+11}{(x+2)^3} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)^3}$$

(26) $\dfrac{5x^2-8}{x^4-5x^2+4} = \dfrac{5x^2-8}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$
$= \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-2} + \dfrac{D}{x+2}$ とおく.
両辺を x^4-5x^2+4 倍すると,

$$\begin{aligned} 5x^2-8 = {} & A(x+1)(x-2)(x+2) + B(x-1)(x-2)(x+2) \\ & + C(x-1)(x+1)(x+2) + D(x-1)(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

この式に $x=1$ を代入すると, $A=\dfrac{1}{2}$, $x=-1$ を代入すると, $B=-\dfrac{1}{2}$, $x=2$ を代入すると, $C=1$, $x=-2$ を代入すると, $D=-1$. よって,

$$\frac{5x^2-8}{x^4-5x^2+4} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

(27) $\dfrac{x^3+x-1}{x^4+x^2} = \dfrac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおく.
両辺を x^4+x^2 倍すると,

$$\begin{aligned} x^3+x-1 &= Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \\ &= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B \end{aligned}$$

これより, $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=1$. よって,

$$\frac{x^3+x-1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1}$$

(28) $$\frac{x^2+4x-3}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{x^2+4x-3}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$ とおく.
両辺を x^3-2x^2-x+2 倍すると,

$$x^2+4x-3 = A(x-1)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-1)$$

この式に $x=-1$ を代入すると, $A=-1$, $x=1$ を代入すると, $B=-1$, $x=2$ を代入すると, $C=3$. よって,

$$\frac{x^2+4x-3}{x^3-2x^2-x+2} = -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

(29) $$\frac{x^2+5x+1}{x^3+4x^2+9x+10} = \frac{x^2+5x+1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$
とおく. 両辺を $x^3+4x^2+9x+10$ 倍すると,

$$x^2+5x+1 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x+2)$$

この式に $x=-2$ を代入すると, $A=-1$, $x=0$ を代入すると, $5A+2C=1$ より, $C=3$. 両辺の x^2 の係数を比較すると, $1=A+B$ より $B=2$. よって,

$$\frac{x^2+5x+1}{x^3+4x^2+9x+10} = -\frac{1}{x+2} + \frac{2x+3}{x^2+2x+5}$$

(30) $$\frac{x^2-x+2}{x^3+3x^2+3x+1} = \frac{x^2-x+2}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$ とおく.
両辺を x^3+3x^2+3x+1 倍すると,

$$\begin{aligned} x^2-x+2 &= A(x+1)^2 + B(x+1) + C \\ &= Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C) \end{aligned}$$

これより, $A=1$, $B=-3$, $C=4$. よって,

$$\frac{x^2-x+2}{x^3+3x^2+3x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3}$$

2.6.

(1) $$\frac{1}{(x+1)(x-5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5}$$ とおく.
両辺を $(x+1)(x-5)$ 倍すると,

$$1 = A(x-5) + B(x+1)$$

この式に $x=-1$ を代入すると, $A=-\frac{1}{6}$, $x=5$ を代入すると, $B=\frac{1}{6}$.
よって,

$$\frac{1}{(x+1)(x-5)} = \frac{1}{6(x-5)} - \frac{1}{6(x+1)}$$

より,

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-5)}dx = \int \left\{\frac{1}{6(x-5)} - \frac{1}{6(x+1)}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{6}\log|x-5| - \frac{1}{6}\log|x+1| + C$$

(2) $\dfrac{1}{x^2-6x-7} = \dfrac{1}{(x+1)(x-7)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-7}$ とおく.
両辺を x^2-6x-7 倍すると,

$$1 = A(x-7) + B(x+1)$$

この式に $x = -1$ を代入すると, $A = -\dfrac{1}{8}$, $x = 7$ を代入すると, $B = \dfrac{1}{8}$.
よって,

$$\frac{1}{x^2-6x-7} = \frac{1}{8(x-7)} - \frac{1}{8(x+1)}$$

より,

$$\int \frac{1}{x^2-6x-7}dx = \int \left\{\frac{1}{8(x-7)} - \frac{1}{8(x+1)}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{8}\log|x-7| - \frac{1}{8}\log|x+1| + C$$

(3) $\dfrac{1}{x^2+5x+6} = \dfrac{1}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+3}$ とおく.
両辺を x^2+5x+6 倍すると,

$$1 = A(x+3) + B(x+2)$$

この式に $x = -2$ を代入すると, $A = 1$, $x = -3$ を代入すると, $B = -1$.
よって,

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

より,

$$\int \frac{1}{x^2+5x+6}dx = \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$= \log|x+2| - \log|x+3| + C$$

(4) $\dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{1}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+3}$ とおく.
両辺を x^2-9 倍すると,

$$1 = A(x+3) + B(x-3)$$

この式に $x = 3$ を代入すると, $A = \dfrac{1}{6}$, $x = -3$ を代入すると, $B = -\dfrac{1}{6}$.
よって,

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6(x-3)} - \frac{1}{6(x+3)}$$

より,

$$\int \frac{1}{x^2-9}dx = \int \left\{ \frac{1}{6(x-3)} - \frac{1}{6(x+3)} \right\} dx$$
$$= \frac{1}{6}\log|x-3| - \frac{1}{6}\log|x+3| + C$$

(5) $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+3}$ とおく.
両辺を $(x+1)(x+3)$ 倍すると,

$$1 = A(x+3) + B(x+1)$$

この式に $x=-1$ を代入すると, $A = \dfrac{1}{2}$, $x=-3$ を代入すると, $B = -\dfrac{1}{2}$.
よって,

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x+3)}$$

より,

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+3)}dx = \int \left\{ \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x+3)} \right\} dx$$
$$= \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{2}\log|x+3| + C$$

(6) $\dfrac{1}{x^2+6x+9} = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ より,

$$\int \frac{1}{x^2+6x+9}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2}dx = -\frac{1}{x+3} + C$$

(7) $\dfrac{1}{x^2-10x+25} = \dfrac{1}{(x-5)^2}$ より,

$$\int \frac{1}{x^2-10x+25}dx = \int \frac{1}{(x-5)^2}dx = -\frac{1}{x-5} + C$$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+10}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2+1}dx$
ここで, $x-3=t$ とおくと, $dx=dt$. よって,

$$\int \frac{1}{x^2-6x+10}dx = \int \frac{1}{t^2+1}dt$$
$$= \tan^{-1} t + C = \tan^{-1}(x-3) + C$$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx$
ここで, $x+1=t$ とおくと, $dx=dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \tan^{-1} t + C = \tan^{-1}(x+1) + C\end{aligned}$$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+1}dx$
ここで, $x+3=t$ とおくと, $dx=dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+6x+10}dx &= \int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \tan^{-1} t + C = \tan^{-1}(x+3) + C\end{aligned}$$

(11) $\displaystyle\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ とおく.
両辺を x^2-1 倍すると,

$$3x+1 = A(x+1) + B(x-1)$$

この式に $x=1$ を代入すると, $A=2$, $x=-1$ を代入すると, $B=1$. よって,

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

より,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2-1}dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= 2\log|x-1| + \log|x+1| + C\end{aligned}$$

(12) $\displaystyle\frac{x+2}{x^2-4x+3} = \frac{x+2}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$ とおく.
両辺を x^2-4x+3 倍すると,

$$x+2 = A(x-1) + B(x-3)$$

この式に $x=1$ を代入すると, $B=-\dfrac{3}{2}$, $x=3$ を代入すると, $A=\dfrac{5}{2}$.
よって,

$$\frac{x+2}{x^2-4x+3} = \frac{5}{2(x-3)} - \frac{3}{2(x-1)}$$

より,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-4x+3}dx &= \int \left\{\frac{5}{2(x-3)} - \frac{3}{2(x-1)}\right\}dx \\ &= \frac{5}{2}\log|x-3| - \frac{3}{2}\log|x-1| + C\end{aligned}$$

(13) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx = \log(x^2+x+1)+C$

(14) $\displaystyle\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{x}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$ とおく.
両辺を x^2+2x-3 倍すると,

$$x = A(x+3)+B(x-1)$$

この式に $x=1$ を代入すると, $A=\dfrac{1}{4}$, $x=-3$ を代入すると, $B=\dfrac{3}{4}$.
よって,

$$\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{4(x+3)}$$

より,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+2x-3}dx &= \int \left\{ \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{4(x+3)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{4}\log|x-1| + \frac{3}{4}\log|x+3| + C\end{aligned}$$

(15) $\displaystyle\frac{2x-11}{2x^2-x-6} = \frac{2x-11}{(x-2)(2x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{2x+3}$ とおく.
両辺を $2x^2-x-6$ 倍すると,

$$2x-11 = A(2x+3)+B(x-2)$$

この式に $x=2$ を代入すると, $A=-1$, $x=-\dfrac{3}{2}$ を代入すると, $B=4$.
よって,

$$\frac{2x-11}{2x^2-x-6} = \frac{4}{2x+3} - \frac{1}{x-2}$$

より,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-11}{2x^2-x-6}dx &= \int \left(\frac{4}{2x+3} - \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= 2\log|2x+3| - \log|x+2| + C\end{aligned}$$

(16) $\displaystyle\int \frac{8x}{1+4x^2}dx = \int \frac{(1+4x^2)'}{1+4x^2}dx = \log(1+4x^2)+C$

(17) $\displaystyle\int \frac{3x+10}{x^2+6x+9}dx = \int \frac{3x+10}{(x+3)^2}dx$
ここで, $x+3=t$ とおくと, $dx=dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+10}{x^2+6x+9}dx &= \int \frac{3t+1}{t^2}dt \\ &= \int \left(\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt \\ &= 3\log|t| - \frac{1}{t} + C \\ &= 3\log|x+3| - \frac{1}{x+3} + C\end{aligned}$$

(18) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-6x+10}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-6x+10)'}{x^2-6x+10}dx = \frac{1}{2}\log(x^2-6x+10)+C$

(19) $\displaystyle\frac{2x-5}{x^2-6x-7} = \frac{2x-5}{(x-7)(x+1)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+1}$ とおく.
両辺を x^2-6x-7 倍すると,

$$2x-5 = A(x+1)+B(x-7)$$

この式に $x=7$ を代入すると, $A=\dfrac{9}{8}$, $x=-1$ を代入すると, $B=\dfrac{7}{8}$.
よって,

$$\frac{2x-5}{x^2-6x-7} = \frac{9}{8(x-7)} + \frac{7}{8(x+1)}$$

より,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-5}{x^2-6x-7}dx &= \int \left\{\frac{9}{8(x-7)} + \frac{7}{8(x+1)}\right\}dx \\ &= \frac{9}{8}\log|x-7| + \frac{7}{8}\log|x+1| + C\end{aligned}$$

(20) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{x}{(x-1)^2+1}dx$
ここで, $x-1=t$ とおくと, $dx=dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx &= \int \frac{t+1}{t^2+1}dt \\ &= \int \left(\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \tan^{-1}t + C \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + \tan^{-1}(x-1) + C\end{aligned}$$

(21) $\displaystyle\int \frac{3x}{4+5x^2}dx = \frac{3}{10}\int \frac{(4+5x^2)'}{4+5x^2}dx = \frac{3}{10}\log(4+5x^2)+C$

(22) $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{x+6}{(x+3)^2+1}dx$

ここで, $x+3=t$ とおくと, $dx=dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+6}{x^2+6x+10}dx &= \int \frac{t+3}{t^2+1}dt \\ &= \int \left(\frac{t}{t^2+1}+\frac{3}{t^2+1}\right)dt \\ &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}+\frac{3}{t^2+1}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\log(t^2+1)+3\tan^{-1}t+C \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+6x+10)+3\tan^{-1}(x+3)+C\end{aligned}$$

(23) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-16}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-16)'}{x^2-16}dx = \frac{1}{2}\log|x^2-16|+C$

(24) $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2-10x+25}dx = \int \frac{x-4}{(x-5)^2}dx$

ここで, $x-5=t$ とおくと, $dx=dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x-4}{x^2-10x+25}dx &= \int \frac{t+1}{t^2}dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt \\ &= \log|t|-\frac{1}{t}+C \\ &= \log|x-5|-\frac{1}{x-5}+C\end{aligned}$$

(25) $\displaystyle\int \frac{2-x}{4x+5}dx = \int\left\{-\frac{1}{4}+\frac{13}{4(4x+5)}\right\}dx = -\frac{1}{4}x+\frac{13}{16}\log|4x+5|+C$

(26) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x+1}dx = \int\left\{x-1+\frac{4}{x+1}\right\}dx = \frac{1}{2}x^2-x+4\log|x+1|+C$

(27) $\displaystyle\frac{2x-3}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}$ とおく.

両辺を $(x+1)^2(x+2)^2$ 倍すると,

$$2x-3 = A(x+1)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+1)^2(x+2)+D(x+1)^2$$

この式に $x=-1$ を代入すると, $B=-5$, $x=-2$ を代入すると, $D=-7$, $x=0$ を代入すると, $2A+C=12$, 両辺の x^3 の係数を比較すると $A+C=0$.

よって, $A=12$, $C=-12$ より

$$\frac{2x-3}{(x+1)^2(x+2)^2}=\frac{12}{x+1}-\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{12}{x+2}-\frac{7}{(x+2)^2}$$

より,

$$\begin{aligned}\int\frac{2x-3}{(x+1)^2(x+2)^2}dx&=\int\left\{\frac{12}{x+1}-\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{12}{x+2}-\frac{7}{(x+2)^2}\right\}dx\\&=12\log|x+1|+\frac{5}{x+1}-12\log|x+2|+\frac{7}{x+2}+C\end{aligned}$$

(28) $\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{x+5}dx=\int\left(x-6+\frac{31}{x+5}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-6x+31\log|x+5|+C$

(29) $\displaystyle\frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}=1+\frac{6x-5}{x^2-5x+6}$. ここで,

$$\frac{6x-5}{x^2-5x+6}=\frac{6x-5}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

とおく. 両辺を x^2-5x+6 倍すると,

$$6x-5=A(x-2)+B(x-3)$$

この式に $x=3$ を代入すると, $A=13$, $x=2$ を代入すると, $B=-7$. よって,

$$\frac{6x-5}{x^2-5x+6}=\frac{13}{x-3}-\frac{7}{x-2}$$

より,

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}dx&=\int\left(1+\frac{13}{x-3}-\frac{7}{x-2}\right)dx\\&=x+13\log|x-3|-7\log|x-2|+C\end{aligned}$$

(30) $\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{x+2}dx=\int\left(x-3+\frac{7}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-3x+7\log|x+2|+C$

(31) $\displaystyle\frac{2x+3}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$ とおく.
両辺を $(x+2)(x-1)^2$ 倍すると,

$$2x+3=A(x-1)^2+B(x+2)(x-1)+C(x+2)$$

この式に $x=-2$ を代入すると, $A=-\dfrac{1}{9}$, $x=1$ を代入すると, $C=\dfrac{5}{3}$, 両辺の x^2 の係数を比較すると, $A+B=0$ より $B=\dfrac{1}{9}$. よって,

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x-1)^2}=-\frac{1}{9(x+2)}+\frac{1}{9(x-1)}+\frac{5}{3(x-1)^2}$$

より,

$$\int \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)^2}dx = \int \left\{-\frac{1}{9(x+2)} + \frac{1}{9(x-1)} + \frac{5}{3(x-1)^2}\right\}dx$$
$$= -\frac{1}{9}\log|x+2| + \frac{1}{9}\log|x-1| - \frac{5}{3(x-1)} + C$$

(32) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)(x+5)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+5}$ とおく.
両辺を $(x+1)(x-2)(x+5)$ 倍すると,

$$1 = A(x-2)(x+5) + B(x+1)(x+5) + C(x+1)(x-2)$$

この式に $x=-1$ を代入すると, $A = -\dfrac{1}{12}$, $x=2$ を代入すると, $B = \dfrac{1}{21}$, $x=-5$ を代入すると, $C = \dfrac{1}{28}$. よって,

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+5)} = -\frac{1}{12(x+1)} + \frac{1}{21(x-2)} + \frac{1}{28(x+5)}$$

より,

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-2)(x+5)}dx = \int \left\{-\frac{1}{12(x+1)} + \frac{1}{21(x-2)} + \frac{1}{28(x+5)}\right\}dx$$
$$= -\frac{1}{12}\log|x+1| + \frac{1}{21}\log|x-2| + \frac{1}{28}\log|x+5| + C$$

(33) $$\int \frac{x^4+x^3+x^2-4x-5}{x^2-x-1}dx = \int \left(x^2+2x+4+\frac{2x-1}{x^2-x-1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + \log|x^2-x-1| + C$$

(34) $\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2x+2}$ とおく.
両辺を $(x-1)(x^2+2x+2)$ 倍すると,

$$x+1 = A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-1)$$

この式に $x=1$ を代入すると, $A = \dfrac{2}{5}$, $x=0$ を代入すると, $C = -\dfrac{1}{5}$, 両辺の x^2 の係数を比較すると, $0 = A+B$ から $B = -\dfrac{2}{5}$. よって,

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{2}{5(x-1)} - \frac{2x+1}{5(x^2+2x+2)}$$

より,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx = \int \left\{\frac{2}{5(x-1)} - \frac{2x+1}{5(x^2+2x+2)}\right\}dx$$
$$= \frac{2}{5}\log|x-1| - \frac{1}{5}\int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}dx$$

ここで, $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}dx$ において, $x+1=t$ とおく. $dx=dt$ より,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}dx &= \int \frac{2t-1}{t^2+1}dt \\ &= \int \frac{2t}{t^2+1}dt - \int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \log(t^2+1) - \tan^{-1} t + C \\ &= \log(x^2+2x+2) - \tan^{-1}(x+1) + C\end{aligned}$$

ゆえに,

$$(\text{与式}) = \frac{2}{5}\log|x-1| - \frac{1}{5}\log(x^2+2x+2) + \frac{1}{5}\tan^{-1}(x+1) + C$$

(35) $\displaystyle\frac{x^3+x-1}{x^4-1} = \frac{x^3+x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ とおく.
両辺を x^4-1 倍すると,

$$x^3+x-1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$$

この式に $x=1$ を代入すると, $A=\dfrac{1}{4}$, $x=-1$ を代入すると, $B=\dfrac{3}{4}$, $x=0$ を代入すると, $-1=A-B-D$ から $D=\dfrac{1}{2}$, 両辺の x^3 の係数を比較すると, $1=A+B+C$ から $C=0$. よって,

$$\frac{x^3+x-1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

より,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x-1}{x^4-1}dx &= \int \left\{\frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}\right\}dx \\ &= \frac{1}{4}\log|x-1| + \frac{3}{4}\log|x+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C\end{aligned}$$

(36) $\displaystyle\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$ とおく.
両辺を $(x-1)(x^2+1)^2$ 倍すると,

$$\begin{aligned}x+2 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1) \\ &= (A+B)x^4 - (B-C)x^3 + (2A+B-C+D)x^2 \\ &\qquad + (-B+C-D+E)x + (A-C-E)\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B-C=0 \\ 2A+B-C+D=0 \\ -B+C-D+E=1 \\ A-C-E=2 \end{cases}$$

これを解くと, $A=\dfrac{3}{4}$, $B=C=-\dfrac{3}{4}$, $D=-\dfrac{3}{2}$, $E=-\dfrac{1}{2}$. よって,

$$\begin{aligned}\int\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx &= \int\left\{\frac{3}{4(x-1)}-\frac{3x+3}{4(x^2+1)}-\frac{3x+1}{2(x^2+1)^2}\right\}dx\\ &= \frac{3}{4}\log|x-1|-\int\left\{\frac{3x}{4(x^2+1)}+\frac{3}{4(x^2+1)}+\frac{3x+1}{2(x^2+1)^2}\right\}dx\\ &= \frac{3}{4}\log|x-1|-\frac{3}{8}\log(x^2+1)-\frac{3}{4}\tan^{-1}x\\ &\qquad -\frac{3}{2}\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx\end{aligned}$$

ここで, $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ において, $x^2+1=t$ とおくと, $xdx=\dfrac{1}{2}dt$. よって,

$$\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{2t}+C=-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$$

一方, 定理 2.6 より

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$$

よって,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{3}{4}\log|x-1|-\frac{3}{8}\log(x^2+1)-\frac{3}{4}\tan^{-1}x\\ &\qquad -\frac{3}{2}\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx\\ &= \frac{3}{4}\log|x-1|-\frac{3}{8}\log(x^2+1)-\frac{3}{4}\tan^{-1}x\\ &\qquad +\frac{3}{4(x^2+1)}-\frac{x}{4(x^2+1)}-\frac{1}{4}\tan^{-1}x+C\\ &= \frac{3}{4}\log|x-1|-\frac{3}{8}\log(x^2+1)-\frac{3}{4}\tan^{-1}x-\frac{x-3}{4(x^2+1)}-\frac{1}{4}\tan^{-1}x+C\end{aligned}$$

2.7.

(1) $\cos x=t$ とおくと, $-\sin xdx=dt$, すなわち $\sin xdx=-dt$. よって,

$$\int(\cos^3x-1)\sin xdx=\int(1-t^3)dt=t-\frac{1}{4}t^4+C=-\frac{1}{4}\cos^4x+\cos x+C$$

(2) $\sin x=t$ とおくと, $\cos xdx=dt$. よって,

$$\int\frac{\cos x}{\sin^2x+1}dx=\int\frac{1}{t^2+1}dt=\tan^{-1}t+C=\tan^{-1}(\sin x)+C$$

(3) $\sin x = t$ とおくと, $\cos x dx = dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int (\sin^2 x + \sin x + 1)\cos x dx &= \int (t^2 + t + 1) dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + C \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \sin x + C\end{aligned}$$

(4) $\sin x = t$ とおくと, $\cos x dx = dt$. よって,

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$$

(5) $\cos x = t$ とおくと, $-\sin x dx = dt$, すなわち, $\sin x dx = -dt$. よって,

$$\int \{\sin(\cos x)\}\sin x dx = -\int \sin t dt = \cos t + C = \cos(\cos x) + C$$

(6) $\cos x = t$ とおくと, $-\sin x dx = dt$, すなわち, $\sin x dx = -dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int (\cos^3 x - 5\cos x + 7)\sin x dx &= -\int (t^3 - 5t + 7) dt \\ &= -\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{2}t^2 + 7t\right) + C \\ &= -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{5}{2}\cos^2 x - 7\cos x + C\end{aligned}$$

(7) $\cos x = t$ とおくと, $-\sin x dx = dt$, すなわち $\sin x dx = -dt$. よって,

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + 1} dx = -\int \frac{1}{t+1} dt = -\log|t+1| + C = -\log(1 + \cos x) + C$$

(8) $\cos x = t$ とおくと, $-\sin x dx = dt$, すなわち $\sin x dx = -dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos x dx &= 2\int \sin x \cos^2 x dx \\ &= -2\int t^2 dt \\ &= -\frac{2}{3}t^3 + C \\ &= -\frac{2}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$

(9) $\tan x = t$ とおくと,

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \iff (1 + \tan^2 x) dx = dt \iff dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

よって,

$$\int (\tan^3 x + 2\tan^2 x + 1)dx = \int \frac{t^3 + 2t^2 + 1}{t^2 + 1} dt$$
$$= \int \left(t + 2 - \frac{t}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt$$
$$= \frac{1}{2} t^2 + 2t - \frac{1}{2} \log(t^2 + 1) - \tan^{-1} t + C$$
$$= \frac{1}{2} \tan^2 x + 2\tan x - \frac{1}{2} \log(\tan^2 x + 1) - \tan^{-1}(\tan x) + C$$
$$= \frac{1}{2} \tan^2 x + 2\tan x + \log|\cos x| - \tan^{-1}(\tan x) + C$$

(10) $\tan x = t$ とおくと,

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \iff (1 + \tan^2 x)dx = dt \iff dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$$

よって,

$$\int \frac{1}{\tan^2 x} dx = \int \frac{1}{t^2(1 + t^2)} dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt$$
$$= -\frac{1}{t} - \tan^{-1} t + C$$
$$= -\frac{1}{\tan x} - \tan^{-1}(\tan x) + C$$

(11) $\tan x = t$ とおくと,

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \iff (1 + \tan^2 x)dx = dt \iff dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$$

よって,

$$\int \frac{1}{2\tan^2 x - 1} dx = \int \frac{1}{(2t^2 - 1)(t^2 + 1)} dx$$
$$= \int \left\{ \frac{1}{3(\sqrt{2}t - 1)} - \frac{1}{3(\sqrt{2}t + 1)} - \frac{1}{3(t^2 + 1)} \right\} dt$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \log|\sqrt{2}t - 1| - \frac{1}{3\sqrt{2}} \log|\sqrt{2}t + 1| - \frac{1}{3} \tan^{-1} t + C$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \log\left| \frac{\sqrt{2}\tan x - 1}{\sqrt{2}\tan x + 1} \right| - \frac{1}{3} \tan^{-1}(\tan x) + C$$

(12) $$\int(\sin x+\cos x)^2dx=\int(1+2\sin x\cos x)dx$$
$$=\int(1+\sin 2x)dx=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

(13) $$\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx.$$
$\cos x=t$ とおくと, $-\sin x dx=dt$. よって,

$$\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{1}{t^2-1}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

(14) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおく. $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$. よって,

$$\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\int\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$=\int dt$$
$$=t+C=\tan\frac{x}{2}+C$$

(15) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおく. $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$. よって,

$$\int\frac{2+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx=\int\frac{2+\frac{2t}{1+t^2}}{(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$=\int\left(t+1+\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+t+\log|t|+C$$
$$=\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

(16) $$\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int\frac{(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}dx=\log|\cos x+\sin x|+C$$

(17) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおく. $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{2+\sin x}dx&=\int\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt\\&=\int\frac{1}{t^2+t+1}dt\\&=\int\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

(18) $\displaystyle\int\frac{\cos x-1}{\sin x+1}dx=\int\left(\frac{\cos x}{\sin x+1}-\frac{1}{\sin x+1}\right)dx=\log(\sin x+1)-\int\frac{1}{\sin x+1}dx$

ここで, $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+1}dx$ において $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおく. $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sin x+1}dx&=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt\\&=\int\frac{2}{(t+1)^2}dt\\&=-\frac{2}{t+1}+C=-\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}+C\end{aligned}$$

よって,

$$\int\frac{\cos x-1}{\sin x+1}dx=\log(\sin x+1)+\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}+C$$

2.8.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx.$
$x^{\frac{1}{6}} = t$ とおくと, $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx &= \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt \\ &= \int \frac{6t^3}{t+1}dt \\ &= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= 6\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \log|t+1|\right) + C \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\log|t+1| + C\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{2x+3} = t$ とおくと, $x = \dfrac{t^2-3}{2}$, $dx = tdt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx &= \int \frac{t}{t}dt \\ &= \int dt \\ &= t + C = \sqrt{2x+3} + C\end{aligned}$$

(3) $\sqrt[3]{x-1} = t$ とおく. $x = t^3+1$, $dx = 3t^2dt$. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}dx &= \int \frac{t^3+1}{t}\cdot 3t^2dt \\ &= 3\int (t^4+t)dt \\ &= \frac{3}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^2 + C = \frac{3}{5}(x-1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{x^2-1} = t - x$ とおく. $x = \dfrac{t^2+1}{2t} = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2t}$, $dx = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2t^2}\right)dt = \dfrac{t^2-1}{2t^2}dt$. また,

$$\sqrt{x^2-1} = t - x = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t}$$

よって,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{1}{(\frac{t^2+1}{2t})^2\frac{t^2-1}{2t}} \cdot \frac{t^2-1}{2t^2}dt$$
$$= \int \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$$

ここで, $t^2+1=u$ とおくと, $2tdt=du$. よって,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{2}{u^2}du \\ &= -\frac{2}{u}+C \\ &= -\frac{2}{t^2+1}+C \\ &= -\frac{2}{(x+\sqrt{x^2-1})^2+1}+C \\ &= -\frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2-1}}+C\end{aligned}$$

(5) $\sqrt{x^2-4}=t-x$ とおく. $x=\frac{t^2+4}{2t}=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}$, $dx=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\frac{t^2-4}{2t^2}dt$. また,

$$\sqrt{x^2-4}=t-x=t-\frac{t^2+4}{2t}=\frac{t^2-4}{2t}$$

よって,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-4}dx &= \int \frac{t^2-4}{2t}\cdot\frac{t^2-4}{2t^2}dt \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{t^4-8t^2+16}{t^3}dt \\ &= \frac{1}{4}\int \left(t-\frac{8}{t}+\frac{16}{t^3}\right)dt \\ &= \frac{1}{8}t^2-2\log|t|-\frac{2}{t^2}+C \\ &= \frac{1}{8}(\sqrt{x^2+4}+x)^2-2\log|\sqrt{x^2+4}+x|-\frac{2}{(\sqrt{x^2+4}+x)^2}+C \\ &= \frac{1}{8}(2x^2+2x\sqrt{x^2-4}-4)-2\log|\sqrt{x^2+4}+x|-\frac{1}{8}(2x^2-2x\sqrt{x^2-4}-4)+C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}-2\log|\sqrt{x^2+4}+x|+C\end{aligned}$$

(6) $(2x+1)^{\frac{3}{4}} = t$ とおく. $x = \dfrac{t^{\frac{4}{3}}-1}{2}$, $dx = \dfrac{2}{3}t^{\frac{1}{3}}dt$. よって,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(2x+1)^{\frac{3}{4}}}dx &= \int \frac{(\frac{t^{\frac{4}{3}}-1}{2})^2}{t} \cdot \frac{2}{3}t^{\frac{1}{3}}dt \\
&= \int \frac{t^{\frac{8}{3}} - 2t^{\frac{4}{3}} + 1}{12t} \cdot 2t^{\frac{1}{3}}dt \\
&= \int \frac{t^3 - t^{\frac{5}{3}} + t^{\frac{1}{3}}}{6t}dt \\
&= \frac{1}{6}\int \left(t^2 - t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{-2}{3}}\right)dt \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + 3t^{\frac{1}{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{18}(2x+1)^{\frac{9}{4}} - \frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{4}} + C \\
&= \frac{1}{90}(2x+1)^{\frac{1}{4}}\left\{5(2x+1)^2 - 9(2x+1) + 45\right\} + C \\
&= \frac{1}{90}(2x+1)^{\frac{1}{4}}(20x^2 + 2x + 41) + C
\end{aligned}
$$

(7) $\sqrt{x+1} = t$ とおく. $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. よって,

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+1}dx &= \int (t^2-1)t \cdot 2tdt \\
&= 2\int (t^4 - t^2)dt \\
&= \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C \\
&= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}\{3(x+1) - 5\} \\
&= \frac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}(3x-2) + C
\end{aligned}
$$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int \frac{1}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}dx$

$\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = t$ とおく．$x = \dfrac{1}{t^2+1}$, $dx = \dfrac{-2t}{(t^2+1)^2}dt$. よって，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{t^2+1}\cdot t} \cdot \frac{-2t}{t^2+1}dt \\ &= -2\int dt \\ &= -2t + C = -2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + C\end{aligned}$$

(9) $\sqrt{x^2+9} = t - x$ とおく．$x = \dfrac{t^2-9}{2t} = \dfrac{t}{2} - \dfrac{9}{2t}$, $dx = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2t^2}\right)dt = \dfrac{t^2+9}{2t^2}dt$. また，

$$\sqrt{x^2+9} = t - x = t - \frac{t^2-9}{2t} = \frac{t^2+9}{2t}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+9}}dx &= \int \frac{1}{\frac{t^2-9}{2t}\frac{t^2+9}{2t}} \cdot \frac{t^2+9}{2t^2}dt \\ &= 2\int \frac{1}{t^2-9}dt \\ &= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right)dt \\ &= \frac{1}{3}\log|t-3| - \frac{1}{3}\log|t+3| + C \\ &= \frac{1}{3}\log|\sqrt{x^2+9}+x-3| - \frac{1}{3}\log|\sqrt{x^2+9}+x+3| + C\end{aligned}$$

(10) $\sqrt[5]{2x+1} = t$ とおく．$x = \dfrac{t^5-1}{2}$, $dx = \dfrac{5}{2}t^4dt$. よって，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt[5]{2x+1}}dx &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{5}{2}t^4dt \\ &= \frac{5}{2}\int t^3dt \\ &= \frac{5}{8}t^4 + C = \frac{5}{8}(2x+1)^{\frac{4}{5}} + C\end{aligned}$$

(11) $$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})dx$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right\} + C$$
$$= \frac{1}{3}\left\{(x+2)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right\} + C$$

(12) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ とおく. $x = \dfrac{t^2-1}{2t} = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2t}$, $dx = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2t^2}\right)dt = \dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$. また,

$$\sqrt{x^2+1} = t - x = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

よって,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\frac{t^2-1}{2t}\frac{t^2+1}{2t}} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}dt$$
$$= \int \frac{2}{t^2-1}dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= \log|t-1| - \log|t+1| + C$$
$$= \log|\sqrt{x^2+1}+x-1| - \log|\sqrt{x^2+1}+x+1| + C$$

(13) $\sqrt{1-x} = t$ とおく. $x = 1 - t^2$, $dx = -2tdt$. よって,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}dx = \int \frac{1}{(1-t^2)t} \cdot (-2t)dt$$
$$= \int \frac{2}{t^2-1}dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= \log|t-1| - \log|t+1| + C$$
$$= \log|\sqrt{1-x}-1| - \log|\sqrt{1-x}+1| + C$$

(14) $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$ とおく. $x = \dfrac{t^2-1}{2t+1} = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4(2t+1)}$,
$dx = \left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2(2t+1)^2}\right\}dt = \dfrac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt$. また,

$$\sqrt{x^2+x+1} = t - x = t - \frac{t^2-1}{2t+1} = \frac{t^2+t+1}{2t+1}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx &= \int \frac{1}{\frac{t^2-1}{2t+1}\frac{t^2+t+1}{2t+1}} \cdot \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2-1}dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \log|t-1| - \log|t+1| + C \\
&= \log|\sqrt{x^2+x+1}+x-1| - \log|\sqrt{x^2+x+1}+x+1| + C
\end{aligned}$$

(15) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{1+(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}dx$

ここで, $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = t$ とおく. $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} = 1 - \dfrac{2}{t^2+1}$, $dx = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}dt$.
また,

$$1 - x = 1 - \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) = \frac{2}{t^2+1}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{1}{1+(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}dx \\
&= \int \frac{1}{1+\frac{2}{t^2+1}t} \cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt \\
&= \int \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2}dt
\end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

とおく. 両辺を $(t^2+1)(t+1)^2$ 倍すると,

$$4t = A(t+1)(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)^2$$

両辺に $t=-1$ を代入すると, $B=-2$, $t=0$ を代入すると $A+B+D=0$ より $A+D=2$. 両辺の t^3 の係数を比較すると $A+C=0$. $t=1$ を代入すると $4A+2B+4C+4D=4$ より $A+C+D=2$. これより, $A=0$, $C=0$,

$D=2$. よって,

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 2\int\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt \\
&= 2\tan^{-1}t+\frac{2}{t+1}+C \\
&= 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{2}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1}+C \\
&= 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+C \\
&= 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x^2}-1+x}{x}+C
\end{aligned}
$$

(16) $\sqrt[n]{1+x}=t$ とおく. $x=t^n-1$, $dx=nt^{n-1}dt$. よって,

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt[n]{1+x}dx &= \int(t^n-1)t\cdot nt^{n-1}dt \\
&= n\int(t^{2n}-t^n)dt \\
&= \frac{n}{2n+1}t^{2n+1}-\frac{n}{n+1}t^{n+1}+C \\
&= \frac{n}{2n+1}(1+x)^{\frac{2n+1}{n}}-\frac{n}{n+1}(1+x)^{\frac{n+1}{n}}+C \\
&= \frac{n}{(n+1)(2n+1)}(1+x)^{\frac{n+1}{n}}\{(n+1)(1+x)-(2n+1)\}+C \\
&= \frac{n}{(n+1)(2n+1)}(1+x)^{\frac{n+1}{n}}\{(n+1)x-n\}+C
\end{aligned}
$$

(17) $\sqrt{x+2}=t$ とおく. $x=t^2-2$, $dx=2tdt$. よって,

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{1+\sqrt{x+2}}dx &= \int\frac{1}{1+t}\cdot 2tdt \\
&= 2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= 2t-2\log|t+1|+C \\
&= 2\sqrt{x+2}-2\log(\sqrt{x+2}+1)+C
\end{aligned}
$$

(18) $\sqrt{x+7}=t$ とおく. $x=t^2-7$, $dx=2tdt$. よって,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{6+x\sqrt{x+7}}dx &= \int \frac{t^2-7}{6+(t^2-7)t}\cdot 2tdt \\
&= \int \frac{2t^3-14t}{t^3-7t+6}dt \\
&= \int \left(2-\frac{12}{t^3-7t+6}\right)dt \\
&= \int \left\{2-\frac{12}{(t-1)(t-2)(t+3)}\right\}dt \\
&= \int \left\{2-\frac{12}{(t-1)(t-2)(t+3)}\right\}dt \\
&= \int \left\{2+\frac{3}{t-1}-\frac{12}{5(t-2)}-\frac{3}{5(t+3)}\right\}dt \\
&= 2t+3\log|t-1|-\frac{12}{5}\log|t-2|-\frac{3}{5}\log|t+3|+C \\
&= 2\sqrt{x+7}+3\log|\sqrt{x+7}-1| \\
&\qquad -\frac{12}{5}\log|\sqrt{x+7}-2|-\frac{3}{5}\log|\sqrt{x+7}+3|+C
\end{aligned}
$$

(19) $\sqrt{x^2-1}=t-x$ とおく. $x=\dfrac{t^2+1}{2t}=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2t}$, $dx=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2t^2}\right)dt=\dfrac{t^2-1}{2t^2}dt$. また,

$$\sqrt{x^2-1}=t-x=t-\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}\right)=\frac{t^2-1}{2t}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}dx &= \int \frac{t^2-1}{2t}\cdot\frac{t^2-1}{2t^2}dt \\
&= \int \frac{t^4-2t^2+1}{4t^3}dt \\
&= \int \left(\frac{t}{4}-\frac{1}{2t}+\frac{1}{4t^3}\right)dt \\
&= \frac{1}{8}t^2-\frac{1}{2}\log|t|-\frac{1}{8t^2}+C \\
&= \frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2-1})^2-\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|-\frac{1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2}+C \\
&= \frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2-1})^2-\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|-\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{8}+C \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|+C
\end{aligned}
$$

(20) $4-x^2=t$ とおくと, $-2xdx=dt$. よって,

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{-1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

2.9.

(1)
$$\begin{aligned}\int_1^4\left(x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)dx&=\int_1^4\left(x^2+x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^4\\&=\left(\frac{64}{3}-\frac{1}{4}-\frac{2}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-1-2\right)=\frac{209}{12}\end{aligned}$$

(2)
$$\int_2^{e^2+1}\frac{1}{x-1}dx=[\log|x-1|]_2^{e^2+1}=\log e^2-\log 1=2$$

(3)
$$\begin{aligned}\int_1^4\frac{2x^{\frac{3}{2}}+3x^2-\sqrt{x}+1}{x}dx&=\int_1^4\left(2x^{\frac{1}{2}}+3x-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)dx\\&=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^2-2x^{\frac{1}{2}}+\log|x|\right]_1^4\\&=\left(\frac{32}{3}+\frac{48}{2}-4+\log 4\right)-\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-2\right)\\&=\frac{179}{6}+2\log 2\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\sqrt{x}-1\right)^2dx&=\int_0^1(x-2\sqrt{x}+1)dx\\&=\int_0^1(x-2x^{\frac{1}{2}}+1)dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1\right)=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

(5)
$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx=\int_0^1(x+1)^{-\frac{1}{3}}dx=\left[\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{2}2^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}-\frac{3}{2}$$

(6)
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{3x^3+2x^2-x+4}{x+1}dx&=\int_0^1\left(3x^2-x+\frac{4}{x+1}\right)dx\\&=\left[x^3-\frac{1}{2}x^2+4\log|x+1|\right]_0^1=\frac{1}{2}+4\log 2\end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\sin t-\cos t)dt&=[-\cos t-\sin t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\\&=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=0\end{aligned}$$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left[\sin^{-1} x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

(10) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2\frac{\theta}{2}d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos\theta}{2}d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

(11)
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= [\log|x| - \log|x+1|]_1^2 \\ &= (\log 2 - \log 3) - (-\log 2) = 2\log 2 - \log 3\end{aligned}$$

(12)
$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx &= \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}[\log|x-1| - \log|x+1|]_1^2 \\ &= \frac{1}{2}(\log 2 - \log 4) - \frac{1}{2}(-\log 3) = -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 3\end{aligned}$$

2.10.

(1) $\displaystyle\int_1^x \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\left[\log(1+t^2)\right]_1^x = \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\log 2$

よって,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{t}{1+t^2}dt\right) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\log 2\right\} = \frac{x}{1+x^2}$$

(2) $\displaystyle\int e^{t^2}dt = F(t) + C$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\int_2^{3x+1} e^{t^2}dt\right) &= \frac{d}{dx}[F(t)]_2^{3x+1} \\ &= \frac{d}{dx}\{F(3x+1) - F(2)\} = 3e^{(3x+1)^2}\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{t^3+1}dt = F(t)+C$ とする．このとき，

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{x^2}\frac{1}{t^3+1}dt\right) = \frac{d}{dx}\left[F(t)\right]_1^{x^2}$$
$$= \frac{d}{dx}\left\{F(x^2)-F(1)\right\} = \frac{2x}{\sqrt{x^6+1}}$$

(4) $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$
ここで, ある関数 $g(x)$ に対して,

$$\int g(t)dt = G(t)+C$$

とする．このとき，

$$\int_0^x g(t)dt = [G(t)]_0^x = G(x)-G(0)$$

より，

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x g(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\left(G(x)-G(0)\right) = G'(x) = g(x)$$

これより, $g(t)=f(t)$ または $g(t)=tf(t)$ として考えれば,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x (x-t)f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\left(x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right)$$
$$= \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)$$
$$= \int_0^x f(t)dt$$

2.11. 定理 1.30 (ロピタルの定理) を使えばよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \log(\cos t)dt}{x} = \lim_{x\to 0}\log(\cos x) = 0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\int_0^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^3+1}}dt = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\frac{2}{\sqrt{8x^3+1}} = 2$

(3) 最初に $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_x^{2x} e^{-t^2}dt\right)$ を計算しよう．$\displaystyle\int e^{-t^2}dt = F(t)+C$ とすると，

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{2x} e^{-t^2}dt\right) = \frac{d}{dx}\left[F(t)\right]_x^{2x}$$
$$= \frac{d}{dx}\left(F(2x)-F(x)\right) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

よって, 定理 1.30 （ロピタルの定理）から

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_x^{2x} e^{-t^2}dt = \lim_{x\to 0}\left(2e^{-4x^2} - e^{-x^2}\right) = 1$$

2.12

(1) $\displaystyle\int_1^e \log x dx = [x\log x]_1^e - \int_1^e dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x dx = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = -[\cos x]_0^\pi = -1 - 1 = -2$

(3)
$$\begin{aligned}\int_0^1 xa^x dx &= \left[x\frac{a^x}{\log a}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{a^x}{\log a}dx \\ &= \frac{a}{\log a} - \left[\frac{a^x}{(\log a)^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{a}{\log a} - \frac{a}{(\log a)^2} + \frac{1}{(\log a)^2} = \frac{a\log a - a + 1}{(\log a)^2}\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

(5)
$$\begin{aligned}\int_0^e x\log x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_0^e - \int_0^e \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 = \frac{1}{4}e^2\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$

(7)
$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{-1} x dx &= [x\tan^{-1} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned}\int_1^e (\log x)^2 dx &= \left[x(\log x)^2\right]_1^e - 2\int_1^e x(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= e - 2\int_1^e \log x dx \\ &= e - 2\left([x\log x]_1^e - \int_1^e dx\right) \\ &= e - 2\left(e - [x]_1^e\right) = e - 2(e - e + 1) = e - 2\end{aligned}$$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 x dx$

$$= [-\cos x \sin^2 x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot 2 \sin x \cos x dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1-\sin^2 x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

よって, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{2}{3}[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

(10) $\displaystyle\int_1^e x^3 \log x dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^3 dx$

$$= \frac{1}{4}e^4 - \left[\frac{1}{16}x^4\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}$$

(11) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx = \left[\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx$

$$= \frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{15}\cdot 2^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{15} = \frac{1}{15}2^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{15}$$

(12) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin^{-1} x dx = [x\sin^{-1} x]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

ここで, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ において $t = 1 - x^2$ とおく. $-2xdx = dt$,

x	$0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$
t	$1 \to \frac{1}{2}$

. よって,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = [\sqrt{t}]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ゆえに,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin^{-1} x dx = [x\sin^{-1} x]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$$

2.13

(1) $1-x=t$ とおくと, $-dx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to 1 \\ \hline t & 1\to 0 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \int_1^0 \sqrt{t}\cdot(-1)dt = \int_0^1 \sqrt{t}dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(2) $2x=t$ とおくと, $2dx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to \pi \\ \hline t & 0\to 2\pi \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_0^{\pi} \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin t dt = \frac{1}{2}[-\cos t]_0^{2\pi} = 0$$

(3) $2x=t$ とおくと, $2dx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & -1\to 1 \\ \hline t & -2\to 2 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_{-1}^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 e^t dt = \frac{1}{2}[e^t]_{-2}^2 = \frac{e^4-1}{2e^2}$$

(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{4x^2-1}dx = \int_1^2 \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}dx.$
ここで,

$$\frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1}$$

とおく. 両辺を $(2x-1)(2x+1)$ 倍すると

$$1 = A(2x+1) + B(2x-1)$$

ここで, 両辺に $x=\frac{1}{2}$ を代入すると, $A=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$ を代入すると, $B=-\frac{1}{2}$ を得る. よって,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{4x^2-1}dx &= \int_1^2 \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\log|2x-1| - \frac{1}{2}\log|2x+1|\right]_1^2 dx \\ &= \frac{1}{4}(\log 3 - \log 5) - \frac{1}{4}(\log 1 - \log 3) \\ &= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{4}\log 5\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}dx$
ここで,

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

とおく. 両辺を $(x+1)(x+2)$ 倍すると

$$2x+1 = A(x+2) + B(x+1)$$

ここで, 両辺に $x=-1$ を代入すると, $A=-1$, $x=-2$ を代入すると, $B=3$ を得る. よって,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx &= \int_0^1 \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= [3\log|x+2| - \log|x+1|]_0^1 \\
&= (3\log 3 - \log 2) - (3\log 2 - \log 1) \\
&= 3\log 3 - 4\log 2
\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}
\int_0^3 (5x+2)\sqrt{x+1}dx &= \int_0^3 (5x+2)(x+1)^{\frac{1}{2}}dx \\
&= \left[\frac{2}{3}(5x+2)(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3 5\cdot(x+1)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \frac{2}{3}\left(17\cdot 4^{\frac{3}{2}} - 2\cdot 1\right) - \frac{10}{3}\left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3 \\
&= \frac{2}{3}(17\cdot 8 - 2) - \frac{4}{3}\left(4^{\frac{5}{2}} - 1\right) = 48
\end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned}
\int_{-1}^{\frac{1}{2}} x(2x+3)^{\frac{3}{2}}dx &= \left[\frac{1}{5}x(2x+3)^{\frac{5}{2}}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} - \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}(2x+3)^{\frac{5}{2}}dx \\
&= \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{2}\cdot 4^{\frac{5}{2}} - (-1)\right\} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\left[(2x+3)^{\frac{7}{2}}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{17}{5} - \frac{1}{35}(4^{\frac{7}{2}} - 1) = -\frac{8}{35}
\end{aligned}$$

(8) $1-x=t$ とおくと, $-dx = dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to 1 \\ \hline t & 1\to 0 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1-x}dx = \int_1^0 t^{\frac{1}{3}}\cdot(-1)dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{3}{4}[t^{\frac{4}{3}}]_0^1 = \frac{3}{4}$$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x}dx$ において $-x=t$ とおく．$-dx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & -1\to 1 \\ \hline t & 1\to -1 \\ \hline \end{array}$. よって,

$$\int_{-1}^{1} e^{-x}dx = \int_{1}^{-1} e^{t}\cdot(-1)dt = \int_{-1}^{1} e^{t}dt$$

これより,

$$\int_{-1}^{1}(e^{x}-e^{-x})dx = \int_{-1}^{1} e^{x}dx - \int_{-1}^{1} e^{-x}dx = \int_{-1}^{1} e^{x}dx - \int_{-1}^{1} e^{t}dt = 0$$

(10) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx$ において, $2x=t$ とおく．$2dx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & -\dfrac{\pi}{2}\to\dfrac{\pi}{2} \\ \hline t & -\pi\to\pi \\ \hline \end{array}$. よって,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin tdt \\ &= \frac{1}{2}[-\cos t]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{-1}{2}\{\cos\pi-\cos(-\pi)\} \\ &= \frac{-1}{2}\{-1-(-1)\}=0\end{aligned}$$

一方, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3xdx$ において $3x=s$ とおく．$3dx=ds$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & -\dfrac{\pi}{2}\to\dfrac{\pi}{2} \\ \hline s & -\dfrac{3}{2}\pi\to\dfrac{3}{2}\pi \\ \hline \end{array}$.

よって,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3xdx &= \frac{1}{3}\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos sds \\ &= \frac{1}{3}[\sin s]_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= \frac{1}{3}(-1-1) = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

ゆえに, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos 3x)dx = 0-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$

(11) $$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1-x}{1+x^2}dx &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx \\ &= \left[\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{-1}^{1} \\ &= \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)-\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(12) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{9x^2-4}dx = \int_{-2}^{0} x\sqrt{9x^2-4}dx + \int_{0}^{2} x\sqrt{9x^2-4}dx.$

ここで, $\displaystyle\int_{-2}^{0} x\sqrt{9x^2-4}dx$ において, $-x=t$ とおく. $-dx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & -2\to 0 \\ \hline t & 2\to 0 \\ \hline\end{array}$.

よって,

$$\int_{-2}^{0} x\sqrt{9x^2-4}dx = -\int_{2}^{0}(-t)\sqrt{9t^2-4}dt = -\int_{0}^{2} t\sqrt{9t^2-4}dt$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} x\sqrt{9x^2-4}dx &= \int_{-2}^{0} x\sqrt{9x^2-4}dx + \int_{0}^{2} x\sqrt{9x^2-4}dx \\ &= -\int_{0}^{2} t\sqrt{9t^2-4}dt + \int_{0}^{2} x\sqrt{9x^2-4}dx = 0\end{aligned}$$

(13) $x^2=t$ とおくと, $2xdx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to 1 \\ \hline t & 0\to 1 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2}[e^t]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

(14) $1+x^2=t$ とおくと, $2xdx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to 1 \\ \hline t & 1\to 2 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

(15) $$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}dx &= \frac{1}{2}\int_0^2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}(8-4\sqrt{2})\end{aligned}$$

(16) $2x+1=t$ とおくと, $2dx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 1\to 2 \\ \hline t & 3\to 5 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[5]{2x+1}}dx &= \frac{1}{2}\int_3^5 t^{-\frac{1}{5}}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{4}t^{\frac{4}{5}}\right]_3^5 = \frac{5}{8}\left(5^{\frac{4}{5}} - 3^{\frac{4}{5}}\right)\end{aligned}$$

(17) $4-x^2=t$ とおくと, $-2xdx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 1\to 2 \\ \hline t & 3\to 0 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_1^2 x\sqrt{4-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_3^0 \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\int_0^3 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \sqrt{3}$$

(18) $\sqrt{x}=t$ とおくと, $x=t^2$ より $dx=2tdt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to \dfrac{\pi^2}{4} \\ \hline t & 0\to \dfrac{\pi}{2} \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin tdt = [-2t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt = 2[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

2.14.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^6 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^6 xdx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin^6 xdx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\sin^6 xdx.$

例えば, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^6 xdx$ において, $t=x-\dfrac{\pi}{2}$ とおくと, $dx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & \dfrac{\pi}{2}\to \pi \\ \hline t & 0\to \dfrac{\pi}{2} \\ \hline\end{array}$.

よって,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^6 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\left(t+\frac{\pi}{2}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx$$

同様に $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^6 xdx = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin^6 xdx = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\sin^6 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx$ を得る.

よって, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^6 xdx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx = 4\cdot\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{8}\pi.$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\pi}\cos^3 xdx = \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0}\cos^3 xdx + \int_0^{\pi}\cos^3 xdx.$ ここで, $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0}\cos^3 xdx$ において $x=-t$ とおくと, $dx=-dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & -\dfrac{3}{2}\pi\to 0 \\ \hline t & \dfrac{3}{2}\pi\to 0 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0}\cos^3 xdx = -\int_{\frac{3}{2}\pi}^{0}\cos^3(-t)dt = \int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos^3 tdt$$

これより,

$$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\pi}\cos^3 xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3 xdx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^3 xdx$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x dx$ において $t = x - \dfrac{\pi}{2}$ とおくと，$dt = dx$，

x	$\dfrac{\pi}{2} \to \pi$
t	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$

.

よって，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt$$

一方，$\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^3 x dx$ において $s = x - \pi$ とおくと，$ds = dx$，

x	$\pi \to \dfrac{3}{2}\pi$
s	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$

.

よって，

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(s + \pi) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 s ds$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\pi} \cos^3 x dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^3 x dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 2x dx = \int_{-\pi}^{0} \sin^5 2x dx + \int_0^{\pi} \sin^5 2x dx$. ここで，$\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \sin^5 2x dx$ において，$x = -t$ とおくと，$dx = -dt$，

x	$-\pi \to 0$
t	$\pi \to 0$

. よって，

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 2x dx &= \int_{-\pi}^{0} \sin^5 2x dx + \int_0^{\pi} \sin^5 2x dx \\
&= \int_{\pi}^{0} \sin^5 2(-t)(-1) dt + \int_0^{\pi} \sin^5 2x dx \\
&= -\int_0^{\pi} \sin^5 2t dt + \int_0^{\pi} \sin^5 2x dx = 0
\end{aligned}$$

(4) 例題 2.15 と同様の方法から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \sin x}{\cos x + \sin x} dx$ を得る．

よって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$$
$$= \frac{1}{8}\left[-\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

2.15.

(1) $t=\pi-x$ とおくと, $dt=-dx$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to\pi \\ \hline t & \pi\to 0 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\sin^2(\pi-t)dt$$
$$= \int_0^{\pi}(\pi-t)\sin^2 t dt$$
$$= \pi\int_0^{\pi}\sin^2 t dt - \int_0^{\pi} t\sin^2 t dt$$

ゆえに

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 t dt$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

(2) $x=\tan t$ とおくと, $dx=\dfrac{1}{\cos^2 t}dt=(1+\tan^2 t)dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to 1 \\ \hline t & 0\to\frac{\pi}{4} \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan t)dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}\right)dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\frac{\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})}{\cos t}dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\sqrt{2}dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos t dt$$

ここで, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$ において $t-\dfrac{\pi}{4}=-s$ とおくと, $dt=-ds$,

t	$0 \to \frac{\pi}{4}$
s	$\frac{\pi}{4} \to 0$

. よって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \log\cos(-s)(-1)ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos s ds$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sqrt{2}dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t dt \\
&= (\log\sqrt{2})[x]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos s ds - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t dt \\
&= \frac{\pi}{8}\log 2
\end{aligned}$$

2.16.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e-1$

(2)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2}{n}\pi + \cdots + \sin\frac{n}{n}\pi\right) &= \int_0^1 \sin\pi x dx \\
&= \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{0}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}}\right) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2\sqrt{2}-2
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\log\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+2}\log\frac{n+2}{n} + \cdots + \frac{1}{n+n}\log\frac{n+n}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\log\frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+2}\log\frac{n+2}{n} + \cdots + \frac{n}{n+n}\log\frac{n+n}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1+\frac{2}{n}}\log\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\} \\
&= \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x}dx
\end{aligned}$$

ここで, $\log(1+x)=t$ とおくと, $\dfrac{1}{1+x}dx=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to 1 \\ \hline t & 0\to\log 2 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$与式 = \int_0^{\log 2} t dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\log 2} = \frac{1}{2}(\log 2)^2$$

2.17.

(1) $0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき, $1<\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin x}}<\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$$

である. ここで,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = [-2\sqrt{1-x}]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2-\sqrt{4-\pi}$$

よって,

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}dx < 2-\sqrt{4-\pi}$$

(2) $0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき, $\sqrt{1-x^2}<\sqrt{1-x^4}<1$ より,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

ここで,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx = [x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = [\sin^{-1}x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

よって,

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx < \frac{\pi}{6}$$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき, $1-x^2\leqq 1-x^4\leqq 2(1-x^2)$ より,

$$\sqrt{1-x^2}\leqq\sqrt{1-x^4}\leqq\sqrt{2(1-x^2)}$$

これより,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \leqq \int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx \leqq \int_0^1 \sqrt{2(1-x^2)}dx$$

ここで, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ において, $x=\sin t$ とおくと $dx=\cos t dt$,

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

より,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$= \left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

よって,

$$\frac{\pi}{4} \leqq \int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx \leqq \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき, $0 \leqq x^2 \leqq x$ である. これより

$$e^{-\frac{x}{2}} \leqq e^{-\frac{x^2}{2}} \leqq 1$$

よって,

$$\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}dx \leqq \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leqq \int_0^1 dx$$

ここで,

$$\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}dx = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1 = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$\int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$$

ゆえに,

$$2\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \leqq \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leqq 1$$

2.18.

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき, $1 \leqq x^3+1 \leqq x^2+1$ より

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx \leqq \int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx \leqq \int_0^1 dx$$

ここで,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = [\tan^{-1} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$$

よって,

$$\frac{\pi}{4} \leqq \int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx \leqq 1$$

なお, 部分分数分解を利用すれば次のように定積分の計算ができる.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)} \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3\{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\}} + \frac{1}{2\{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\}} \right) dx$$
$$= \frac{1}{3}[\log(x+1)]_0^1 - \frac{1}{6}[\log(x^2-x+1)]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{4}{3}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{4}{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

(2) $k < x < k+1$ のとき, $\dfrac{1}{(k+1)^2} < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{k^2}$ である. これより,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}dx$$
$$\iff \frac{1}{(k+1)^2} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}dx < \frac{1}{k^2}$$

よって, $k = 1, 2, ..., n$ について足し合わせると

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

ここで,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

よって,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{n+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

(3) $k < x < k+1$ のとき, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ である. これより,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}dx$$
$$\iff \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

よって, $k = 1, 2, ..., n$ について足し合わせると

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

ここで,

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=[2\sqrt{x}]_1^{n+1}=2(\sqrt{n+1}-1)$$

よって,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2(\sqrt{n+1}-1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

(4) $k-1<x<k$ のとき, $\dfrac{1}{2k+1}<\dfrac{1}{2x+1}<\dfrac{1}{2k-1}$ である. これより,

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{2k+1}dx<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{2x+1}dx<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{2k-1}dx$$

$$\Longleftrightarrow\frac{1}{2k+1}<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{2x+1}dx<\frac{1}{2k-1}$$

よって, $k=1,2,...,n$ について足し合わせると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}<\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{2x+1}dx<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

ここで,

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{2x+1}dx=\int_{0}^{n}\frac{1}{2x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\log(2x+1)\right]_0^n=\frac{1}{2}\log(2n+1)$$

よって,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}<\frac{1}{2}\log(2n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

2.19.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-x}dx=\lim_{M\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^M=\lim_{M\to\infty}\left(1-e^{-M}\right)=1$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=\lim_{M\to\infty}\left[2\sqrt{1+x}\right]_0^M$

$$=\lim_{M\to\infty}\left(2\sqrt{1+M}-2\right)=+\infty$$

よって, 広義積分は存在しない.

(3) $\displaystyle\int_2^\infty\frac{1}{(1-x)^2}dx=\lim_{M\to\infty}\int_2^M\frac{1}{(1-x)^2}dx=\lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{1-x}\right]_2^M$

$$=\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{1-M}+1\right)=1$$

(4) $$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{M\to\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_0^M$$
$$= \lim_{M\to\infty}\tan^{-1}M = \frac{\pi}{2}$$

(5) $$\int_1^\infty \frac{1}{(1-x)^2}dx = \lim_{\substack{M\to\infty\\N\to1+0}}\int_N^M \frac{1}{(1-x)^2}dx = \lim_{\substack{M\to\infty\\N\to1+0}}\left[\frac{1}{1-x}\right]_N^M$$
$$= \lim_{\substack{M\to\infty\\N\to1+0}}\left(\frac{1}{1-M}-\frac{1}{1-N}\right) = +\infty$$

よって, 広義積分は存在しない.

(6) $$\int_2^\infty \frac{1}{x(x-1)}dx = \lim_{M\to\infty}\int_2^M \frac{1}{x(x-1)}dx$$
$$= \lim_{M\to\infty}\int_2^M \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \lim_{M\to\infty}\left[\log\frac{x-1}{x}\right]_2^M$$
$$= \lim_{M\to\infty}\left(\log\frac{M-1}{M}-\log\frac{1}{2}\right) = \log 2$$

(7) $$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \lim_{\substack{M\to2-0\\N\to1+0}}\int_N^M \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$$
$$= \lim_{\substack{M\to2-0\\N\to1+0}}\int_N^M \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$= \lim_{\substack{M\to2-0\\N\to1+0}}\left[\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]_N^M$$
$$= \lim_{\substack{M\to2-0\\N\to1+0}}\left(\log\left|\frac{M-2}{M-1}\right|-\log\left|\frac{N-2}{N-1}\right|\right) = -\infty$$

よって, 広義積分は存在しない.

(8) $$\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}}dx = \lim_{\substack{M\to0-\\N\to-2+0}}\int_N^M \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}}dx$$
$$= \lim_{\substack{M\to0-\\N\to-2+0}}\int_N^M \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}dx$$
$$= \lim_{\substack{M\to0-\\N\to-2+0}}\left[\sin^{-1}(x+1)\right]_N^M$$
$$= \lim_{\substack{M\to0-\\N\to-2+0}}\left\{\sin^{-1}(M+1)-\sin^{-1}(N+1)\right\} = \pi$$

$$(9)\ \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$$
$$=\lim_{M\to 0-}\int_{-1}^{M}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx+\lim_{N\to 0+}\int_{N}^{1}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$$
$$=\lim_{M\to 0-}\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{M}+\lim_{N\to 0+}\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{N}^{1}$$
$$=\lim_{M\to 0-}\left(3M^{\frac{1}{3}}+3\right)+\lim_{N\to 0+}\left(3-3N^{\frac{1}{3}}\right)=6$$

$$(10)\ \int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx=\left[\sin^{-1}\frac{x-1}{2}\right]_{0}^{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$(11)\ \int_{0}^{e}x\log x dx=\lim_{M\to 0+}\int_{M}^{e}x\log x$$
$$=\lim_{M\to 0+}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_{M}^{e}-\frac{1}{2}\int_{M}^{e}xdx\right\}$$
$$=\lim_{M\to 0+}\left[\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right]_{M}^{e}$$
$$=\lim_{M\to 0+}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}-\frac{M^2}{2}\log M-\frac{M^2}{4}\right)=\frac{e^2}{2}$$

なお, $\lim_{M\to 0+}M^2\log M=0$ については, ロピタルの定理を用いて次のようにして求める.

$$\lim_{M\to 0+}M^2\log M=\lim_{M\to 0+}\frac{\log M}{\frac{1}{M^2}}$$
$$=\lim_{M\to 0+}\frac{\frac{1}{M}}{-\frac{2}{M^3}}$$
$$=\lim_{M\to 0+}\left(-\frac{M^2}{2}\right)=0$$

$$(12)\ \int_{0}^{1}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{M\to 1-0}\int_{0}^{M}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

ここで, $x=\sin t$ とおくと, $dx=\cos t dt$,

x	$0\to M$
t	$0\to \sin^{-1}M$

.

よって, $N=\sin^{-1}M$ とすれば,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{M\to 1-0}\int_0^{\sin^{-1}M}\frac{1+\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t dt \\ &= \lim_{M\to 1-0}\int_0^{\sin^{-1}M}(1+\sin^2 t)dt \\ &= \lim_{M\to 1-0}\int_0^{\sin^{-1}M}\left(1+\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt \\ &= \lim_{N\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^N\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt \\ &= \lim_{N\to\frac{\pi}{2}-0}\left[\frac{3}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^N \\ &= \lim_{N\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{3}{2}N-\frac{1}{4}\sin 2N\right)=\frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

(13) $$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\tan x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\tan x dx \\ &= \lim_{M\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^M \tan x dx+\lim_{N\to\frac{\pi}{2}+0}\int_N^{\pi}\tan x dx \\ &= \lim_{M\to\frac{\pi}{2}-0}[-\log|\cos x|]_0^M+\lim_{N\to\frac{\pi}{2}+0}[-\log|\cos x|]_N^{\pi} \\ &= \lim_{M\to\frac{\pi}{2}-0}(-\log|\cos M|)+\lim_{N\to\frac{\pi}{2}+0}\log|\cos N| = +\infty-\infty\end{aligned}$$

よって発散. ゆえに広義積分は存在しない.

(14) $$\begin{aligned}\int_{-1}^1\frac{\log|x|}{\sqrt[3]{x}}dx &= \int_{-1}^0\frac{\log|x|}{\sqrt[3]{x}}dx+\int_0^1\frac{\log|x|}{\sqrt[3]{x}}dx \\ &= \lim_{M\to 0-}\int_{-1}^M\frac{\log(-x)}{\sqrt[3]{x}}dx+\lim_{N\to 0+}\int_N^1\frac{\log|x|}{\sqrt[3]{x}}dx \\ &= \lim_{M\to 0-}\left\{\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\log(-x)\right]_{-1}^M-\frac{3}{2}\int_{-1}^M x^{-\frac{1}{3}}dx\right\} \\ &\quad+\lim_{N\to 0+}\left\{\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\log x\right]_N^1-\frac{3}{2}\int_N^1 x^{-\frac{1}{3}}dx\right\} \\ &= \lim_{M\to 0-}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\log(-x)-\frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^M+\lim_{N\to 0+}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\log x-\frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}}\right]_N^1 \\ &= \lim_{M\to 0-}\left(\frac{3}{2}M^{\frac{2}{3}}\log(-M)-\frac{9}{4}M^{\frac{2}{3}}+\frac{9}{4}\right) \\ &\quad+\lim_{N\to 0+}\left(-\frac{9}{4}-\frac{3}{2}M^{\frac{2}{3}}\log M+\frac{9}{4}M^{\frac{2}{3}}\right)=0\end{aligned}$$

なお, $\lim_{x\to+0} x^{\frac{2}{3}}\log x = 0$ はロピタルの定理を用いて次のように求めた.

$$\lim_{x\to+0} x^{\frac{2}{3}}\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{3x^{\frac{5}{3}}}} = \lim_{x\to+0}\left(-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) = 0$$

(15) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{M\to0+}\int_M^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{M\to0+}\left[2\sqrt{x}\right]_M^4 = \lim_{M\to0+}\left(4-2\sqrt{M}\right) = 4$

(16) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x(1+x^2)}dx$

ここで,

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

とおく. 両辺を $x(1+x^2)$ 倍すると,

$$1 = A(1+x^2) + (Bx+C)x$$

この式の両辺に $x=0$ を代入すると $A=1$, $x=1$ を代入すると $1=2A+B+C$ より $B+C=-1$, $x=-1$ を代入すると $1=2A+B-C$ より $B-C=-1$. これより, $B=-1$, $C=0$. よって,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}dx &= \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x(1+x^2)}dx \\
&= \lim_{M\to\infty}\int_1^M \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx \\
&= \lim_{M\to\infty}\left[\log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^M \\
&= \lim_{M\to\infty}\left(\log\frac{M}{\sqrt{1+M^2}} - \log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}$$

(17) $$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx &= \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx \\
&= \lim_{M\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{x}\tan^{-1}x\right]_1^M + \int_1^M \frac{1}{x(1+x^2)}dx\right\} \\
&= \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\tan^{-1}x + \log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^M \\
&= \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}\tan^{-1}M + \log\frac{M}{\sqrt{1+M^2}} + \tan^{-1}1 - \log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}$$

ここで, $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$ は (16) の結果を利用した.

(18)
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \tan^{-1}\frac{1}{x}dx &= \lim_{\substack{M\to\infty\\N\to 0+}}\int_N^M \tan^{-1}\frac{1}{x}dx \\ &= \lim_{\substack{M\to\infty\\N\to 0+}}\left\{\left[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\right]_N^M - \int_N^M x\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\right\} \\ &= \lim_{\substack{M\to\infty\\N\to 0+}}\left\{\left[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\right]_N^M + \int_N^M \frac{x}{x^2+1}dx\right\} \\ &= \lim_{\substack{M\to\infty\\N\to 0+}}\left[x\tan^{-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_N^M \\ &= \lim_{\substack{M\to\infty\\N\to 0+}}\left\{\left(M\tan^{-1}\frac{1}{M} + \frac{1}{2}\log(M^2+1)\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(N\tan^{-1}\frac{1}{N} + \frac{1}{2}\log(N^2+1)\right)\right\} = +\infty\end{aligned}$$

よって, 広義積分は存在しない.

2.20. $s \neq 1$ のとき,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^s}dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^M = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{1-s}M^{1-s} - \frac{1}{1-s}\right)$$

よって, 次の 2 通りに場合分けできる.

(i) $s > 1$ のとき. このとき $1-s<0$ より, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ は存在して,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{s-1}$$

(ii) $s < 1$ のとき. このとき $1-s>0$ より, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ は存在しない.

なお, $s = 1$ のときは,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to\infty}[\log|x|]_1^M = \lim_{M\to\infty}\log M = \infty$$

となり, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ は存在しない.

一方, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = \lim_{M\to 0+}\int_M^1 \frac{1}{x^s}dx = \lim_{M\to 0+}\left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_M^1 = \lim_{M\to 0+}\left(\frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s}M^{1-s}\right)$

よって, 次の 2 通りに場合分けできる.

(i) $s<1$ のとき. このとき $1-s>0$ より, $\int_0^1 \frac{1}{x^s}dx$ は存在して,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}$$

(ii) $s>1$ のとき. このとき $1-s<0$ より, $\int_0^1 \frac{1}{x^s}dx$ は存在しない.

なお, $s=1$ のときは,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to 0+}\int_M^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to 0+}[\log|x|]_M^1 = \lim_{M\to 0+}(-\log M) = +\infty$$

となり, $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ は存在しない.

2.21.

(1) $y=x^3-x^2+2$ とすれば, $y'=3x^2-2x$. これより, 点 $(1,2)$ における接線の方程式は

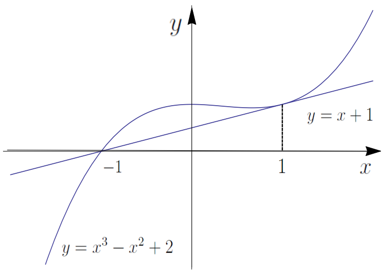
$$y-2=(x-1) \iff y=x+1$$

この直線と $y=x^3-x^2+2$ の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} x^3-x^2+2=x+1 &\iff x^3-x^2-x+1=0 \\ &\iff (x-1)^2(x+1)=0 \end{aligned}$$

より, $x=1,-1$.

また, 関数 $y=x^3-x^2+2$ と直線 $y=x+1$ のグラフは次のようになる.



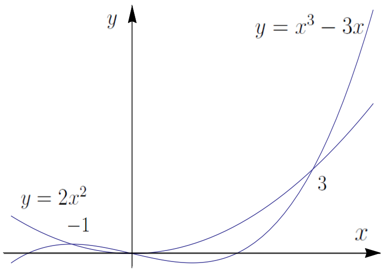
よって, 求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{(x^3-x^2+2)-(x+1)\}dx &= \int_{-1}^1 (x^3-x^2-x+1)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(2) 関数 $y=x^3-3x$ と $y=2x^2$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^3-3x=2x^2 &\iff x^3-2x^2-3x=0 \\ &\iff x(x-3)(x+1)=0 \end{aligned}$$

より, $x=-1,0,3$. また, これらの関数のグラフは次のとおりである.



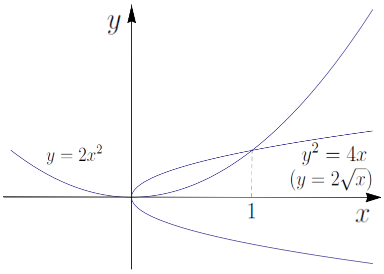
よって, 求める面積は

$$\int_{-1}^{0}(x^3 - 3x - 2x^2)dx + \int_{0}^{3}(2x^2 - x^3 + 3x)dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} = \frac{71}{6}$$

(3) 関数 $y = 2x^2$ と $y^2 = 4x$ の交点の x 座標は

$$4x^4 = 4x \iff x(x^3 - 1) = 0$$

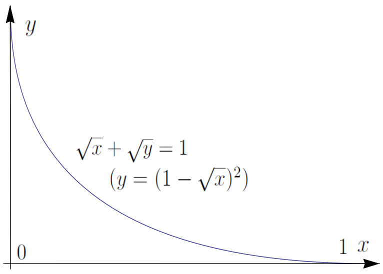
より, $x = 0, 1$. また, これらの関数のグラフは次のとおりである.



よって, 求める面積は

$$\int_{0}^{1}(2\sqrt{x} - 2x^2)dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

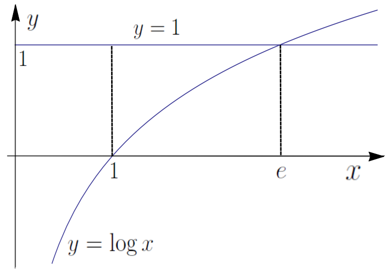
(4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ のグラフは次の通りである.



よって, 図より求める面積は

$$\int_{0}^{1}(1 - \sqrt{x})^2 dx = \int_{0}^{1}(1 - 2\sqrt{x} + x)dx$$
$$= \left[x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6}$$

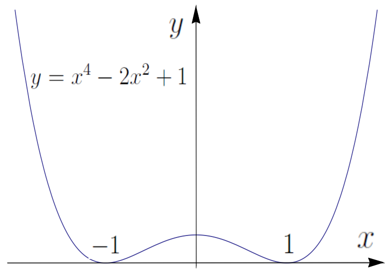
(5) $y = \log x$ と $y = 1$ のグラフは次の通りである.



よって, 図より求める面積は

$$1 + \int_1^e (1 - \log x)dx = 1 + [x]_1^e - \int_1^e \log x dx$$
$$= 1 + [x]_1^e - \left\{ [x \log x]_1^e - \int_1^e dx \right\}$$
$$= 1 + 2[x]_1^e - [x \log x]_1^e = e - 1$$

(6) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ のグラフは次の通りである.



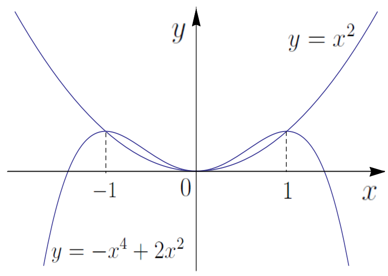
よって, 図より求める面積は

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 = \frac{16}{15}$$

(7) $y = -x^4 + 2x^2$ と $y = x^2$ の交点の x 座標は

$$-x^4 + 2x^2 = x^2 \iff x^4 - x^2 = 0$$
$$\iff x^2(x^2 - 1) = 0$$
$$\iff x = 0, \pm 1$$

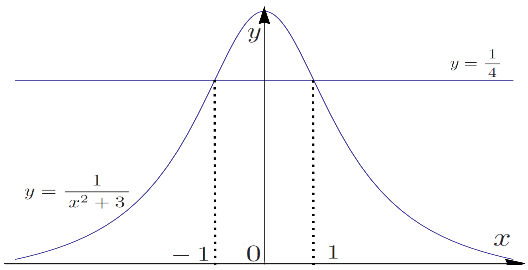
また, これらの関数のグラフは次の通りである.



よって, 図より求める面積は

$$2\int_0^1 (-x^4+2x^2-x^2)dx = 2\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{4}{15}$$

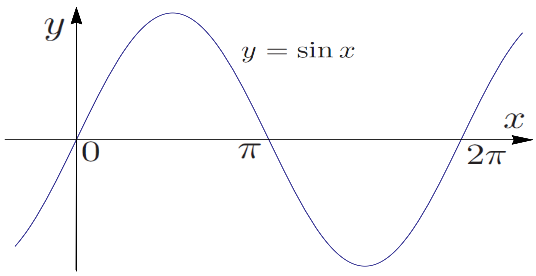
(8) $y=\dfrac{1}{x^2+3}$ と $y=\dfrac{1}{4}$ のグラフは次の通りである.



よって, 図より求める面積は

$$2\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+3}-\frac{1}{4}\right)dx = 2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}x\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2}$$

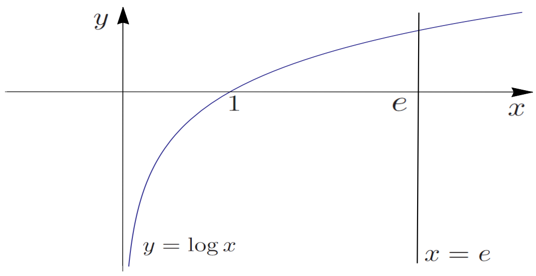
(9) $y=\sin x$ のグラフは次の通りである.



よって, 図より求める面積は

$$2\int_0^{\pi} \sin x dx = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 4$$

(10) $y=\log x$ と $x=e$ のグラフは次の通りである.



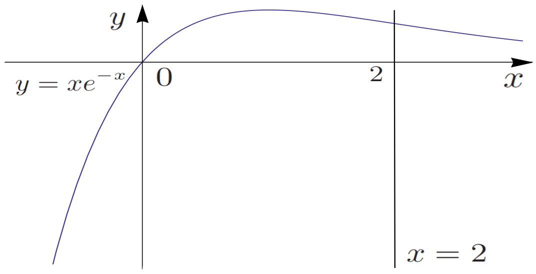
よって, 図より求める面積は

$$\int_1^e \log x dx = [x\log x]_1^e - \int_1^e dx = e-[x]_1^e = 1$$

(11) $y = xe^{-x}$ について, $y' = (1-x)e^{-x}$ より, その増減表は次の通りである.

x		1	
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

また, ロピタルの定理 (定理 1.30) より $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$. よって, $y = xe^{-x}$ と $x = 2$ のグラフは次の通りである.



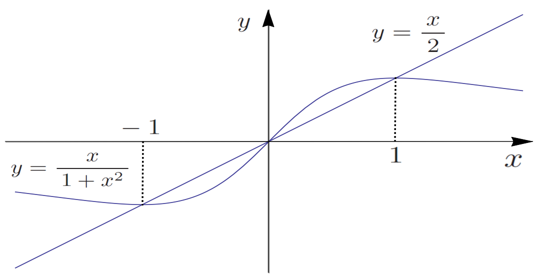
ゆえに, 求める面積は

$$\int_0^2 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^2 - \int_0^2 (-e^{-x})dx$$
$$= [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^2 = 1 - \frac{3}{e^2}$$

(12) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ について, $y' = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ より, その増減表は次の通りである.

x		-1		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

また, $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ より, $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ と $y = \dfrac{x}{2}$ のグラフは次の通りである.



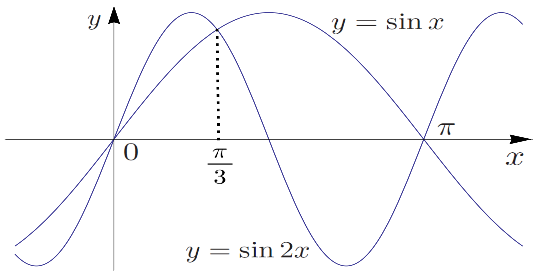
よって, 図より求める面積は

$$2\int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2}\right)dx = 2\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \log 2 - \frac{1}{2}$$

(13) $y = \sin 2x$ と $y = \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における交点の x 座標は

$$\begin{aligned}\sin 2x = \sin x &\iff 2\sin x\cos x = \sin x\\ &\iff \sin x(2\cos x - 1) = 0\\ &\iff \sin x = 0, \cos x = \frac{1}{2}\\ &\iff x = 0, \pi, \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

また, $y = \sin 2x$ と $y = \sin x$ のグラフは次の通りである.

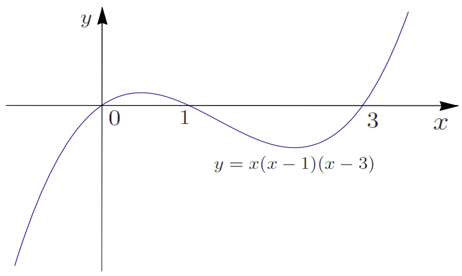


よって, 図より求める面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{5}{2}$$

(14) $y = x(x-1)(x-3)$ のグラフは次の通りである.



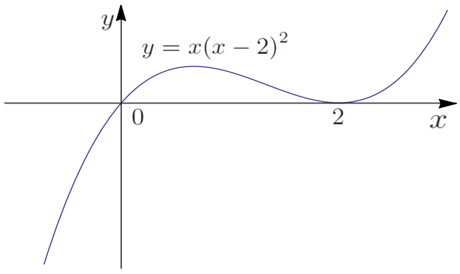
よって, 図より求める面積は

$$\int_0^1 x(x-1)(x-3)dx - \int_1^3 x(x-1)(x-3)dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{37}{12}$$

(15) $y=x(x-2)^2$ のグラフは次の通りである.



よって, 図より求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^2 x(x-2)^2 dx &= \int_0^2 (x^3-4x^2+4x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

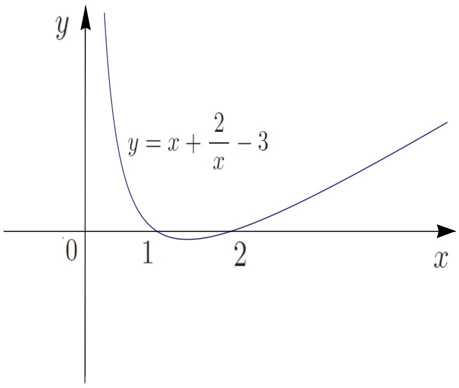
(16) $y = x + \dfrac{2}{x} - 3$ について, $y' = \dfrac{x^2-2}{x^2}$, $y'' = \dfrac{4}{x^3}$ である. よって, 関数 $y = x + \dfrac{2}{x} - 3$ の増減表は次の通りである.

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	$-3-2\sqrt{2}$	$\searrow$		$\searrow$	$-3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$

関数 $y = x + \dfrac{2}{x} - 3$ の, x 軸との交点の x 座標は

$$\begin{aligned}x + \frac{2}{x} - 3 = 0 &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x-2) = 0 \iff x = 1, 2\end{aligned}$$

また, $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm}\left(x + \frac{2}{x} - 3\right) = \pm\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(x + \frac{2}{x} - 3\right) = \pm\infty$. よって, 関数 $y = x + \dfrac{2}{x} - 3$ のグラフは次の通りである.



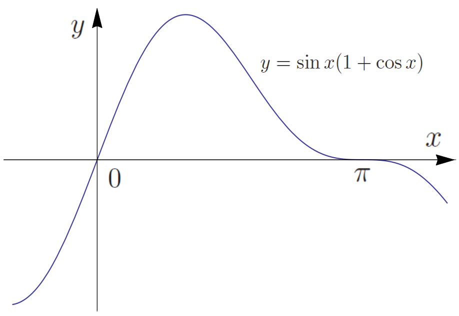
ゆえに, 図より求める面積は

$$-\int_1^2 \left(x + \frac{2}{x} - 3\right) dx = -\left[\frac{1}{2}x^2 + 2\log|x| - 3x\right]_1^2 = \frac{3}{2} - 2\log 2$$

(17) $y = \sin x(1+\cos x)$ について, $y' = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$. よって, 関数 $y = \sin x(1+\cos x)$ の増減表は次の通りである.

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
y'	$+$	$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$	$\searrow$	0

よって, 関数 $y = \sin x(1+\cos x)$ のグラフは次の通りである.

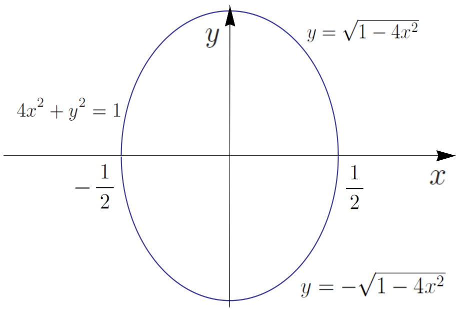


ゆえに, 図より求める面積は

$$\int_0^\pi \sin x(1+\cos x)dx = \int_0^\pi \left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^\pi = 2$$

(18) $4x^2+y^2=1$ のグラフは次の通りである.



よって, 図より求める面積は $2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4x^2}dx$ である. ここで, $x=\frac{1}{2}\sin t$ とおくと, $dx=\frac{1}{2}\cos t dt$,

x	$-\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$
t	$-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$

. よって,

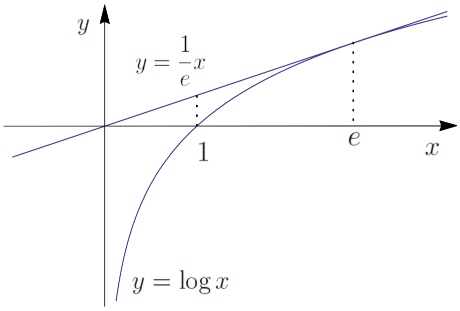
$$
\begin{aligned}
2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4x^2}dx &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{1}{2}\cos t dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

2.22.

(1) $y=\log x$ について, $y'=\frac{1}{x}$. これより, $y=\log x$ の接線の方程式は, 接点の座標を $(c,\log c)$ とすれば,

$$
y-\log c=\frac{1}{c}(x-c) \iff y=\frac{1}{c}x-1+\log c
$$

これが原点を通るので, $c=e$, すなわち, 接線の方程式は $y=\frac{1}{e}x$ となる. この接線と $y=\log x$ のグラフは次の通りである.



よって, 図より求める面積は,

$$
\begin{aligned}
&1 \times \frac{1}{e} \times \frac{1}{2} + \int_1^e \left(\frac{1}{e}x - \log x \right) dx \\
&= \frac{1}{2e} + \left[\frac{1}{2e}x^2 \right]_1^e - \left\{ [x \log x]_1^e - \int_1^e dx \right\} \\
&= \frac{1}{2e} + \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e} \right) - [x \log x - x]_1^e = \frac{e}{2} - 1
\end{aligned}
$$

(2) $y = \dfrac{\log x}{x}$ とすると, $y' = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$. これより, 原点から $y = \dfrac{\log x}{x}$ へ引いた接線の, 接点の x 座標を c とすると求める接線の方程式は

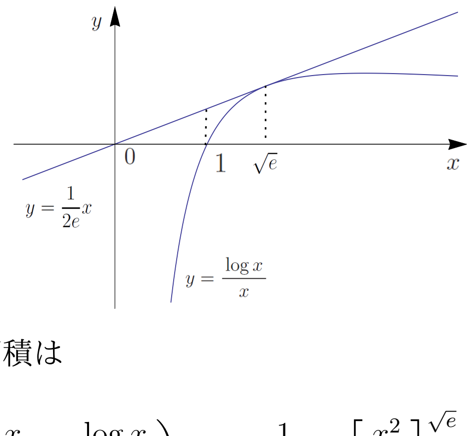
$$
y - \frac{\log c}{c} = \frac{1 - \log c}{c^2}(x - c) \iff y = \frac{1 - \log c}{c^2}x - \frac{1 - 2\log c}{c}.
$$

この接線が原点を通るので, $c = \sqrt{e}$, すなわち, 接線の方程式は $y = \dfrac{1}{2e}x$.

いっぽう, $y = \dfrac{\log x}{x}$ の増減表は次の通りである.

x	0		e	
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

よって, この関数と接線のグラフは次の通りである.



ゆえに, 求める面積は

$$
\begin{aligned}
1 \times \frac{1}{2e} \times \frac{1}{2} + \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x}{2e} - \frac{\log x}{x} \right) dx &= \frac{1}{4e} + \left[\frac{x^2}{4e} \right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x} dx \\
&= \frac{1}{4} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x} dx
\end{aligned}
$$

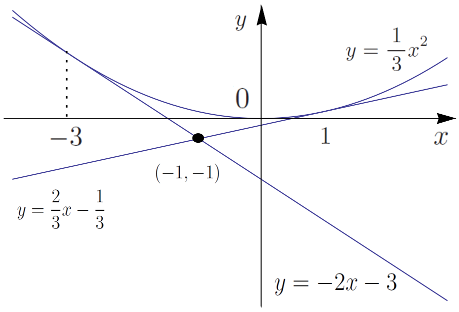
ここで, $\log x = t$ とおくと, $\frac{1}{x}dx = dt$,

x	$1 \to \sqrt{e}$
t	$0 \to \frac{1}{2}$

. よって,

$$(\text{与式}) = \frac{1}{4} - \int_0^{\frac{1}{2}} tdt = \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

(3) $y = \frac{1}{3}x^2$ より $y' = \frac{2}{3}x$. よって, 点 A における接線の方程式は $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, 点 B における接線の方程式は $y = -2x - 3$. また, これらの接線の交点の座標は $(-1, -1)$ である. そして, これらの関数のグラフは次の通りである.



よって, 図より求める面積は

$$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3\right) dx + \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{9}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{9}$$

2.23.

(1) $0 \leqq t \leqq 2$ において, $y = 2t - t^2 \geqq 0$, $x' = 2 > 0$ より, 求める面積は,

$$\int_0^2 (2t - t^2) \cdot 2dt = 2\left[t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

(2) $-1 \leqq t \leqq 3$ において $y = t^2 - 2t - 3 \leqq 0$, $x' = -1 < 0$ より, 求める面積は

$$-\int_{-1}^{3} (t^2 - 2t - 3) \cdot |-1| dt = -\left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t\right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において, $y = 1 - \cos\theta \geqq 0$, $x' = 1 - \cos\theta \geqq 0$ より, 求める面積は,

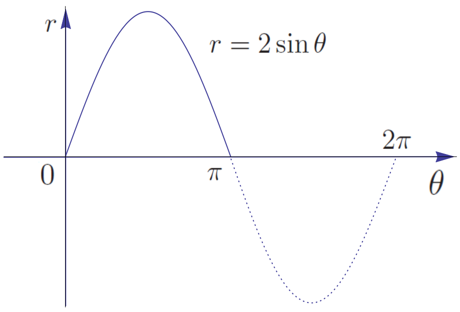
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta \\ &= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi\end{aligned}$$

(4) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における面積を求めて 4 倍すればよい. $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において, $y = \cos^3\theta \geqq 0$, $x' = 3\sin^2\theta\cos\theta \geqq 0$. よって, 求める面積は, 例題 2.16 の結果を使って,

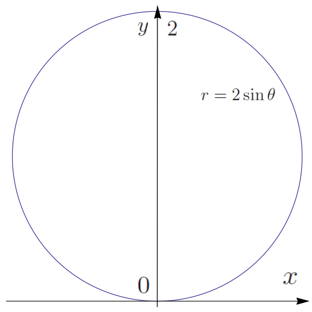
$$\begin{aligned}4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \cdot 3\sin^2\theta\cos\theta d\theta &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta(1-\cos^2\theta) d\theta \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta - \cos^6\theta) d\theta \\ &= 12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi\end{aligned}$$

2.24.

(1) 最初に $r = 2\sin\theta$ のグラフを (θ, r)-平面に描く. $r > 0$ に注意すると次のようになる.



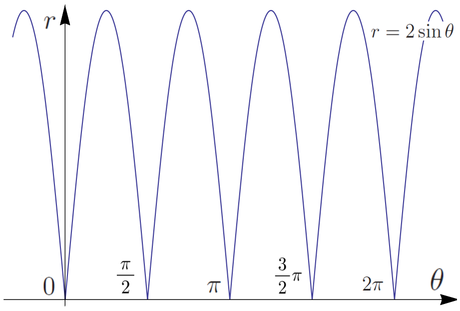
これを, θ は x 軸とのなす角, r は原点からの距離であることに注意して, (x, y)-平面にグラフを描くと次のようにになる.



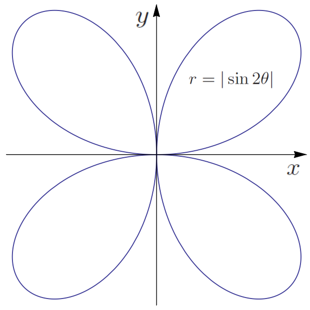
よって, この曲線で囲まれる部分の面積は,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2\sin\theta)^2 d\theta = 2\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$
$$= \int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \pi$$

(2) 最初に $r = |\sin 2\theta|$ のグラフを (θ, r)-平面に描くと次のようになる.



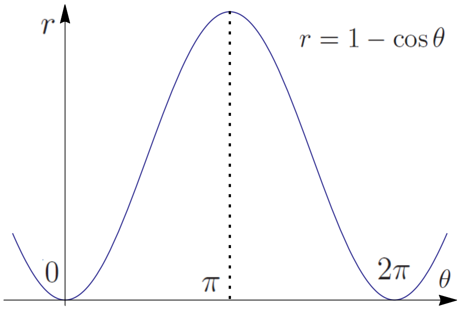
これを, θ は x 軸とのなす角, r は原点からの距離であることに注意して, (x, y)-平面にグラフを描くと次のようにになる.



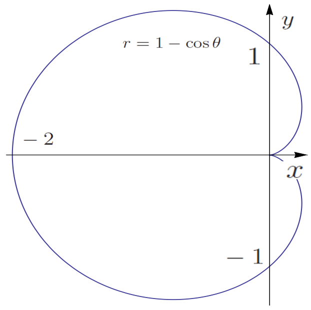
よって, この曲線で囲まれる部分の面積は,

$$4 \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)d\theta$$
$$= \left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

(3) 最初に $r = 1 - \cos\theta$ のグラフを (θ, r)-平面に描くと次のようになる.



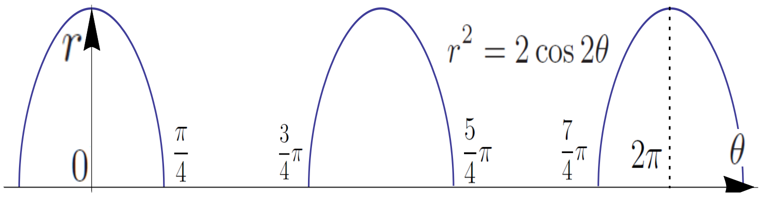
これを, θ は x 軸とのなす角, r は原点からの距離であることに注意して, (x,y)-平面にグラフを描くと次のようにになる.



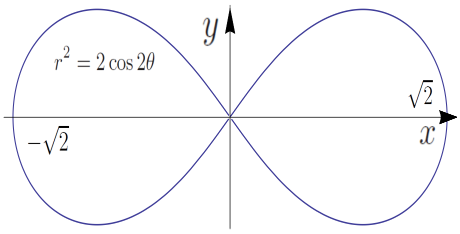
よって, この曲線で囲まれる部分の面積は,

$$
\begin{aligned}
2\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta &= \int_0^{\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta \\
&= \left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

(4) 最初に $r^2=2\cos 2\theta$ のグラフを (θ,r)-平面に描く. $r^2\geqq 0$ であることに注意すると次のようになる.



これを, θ は x 軸とのなす角, r は原点からの距離であることに注意して, (x,y)-平面にグラフを描くと次のようにになる.



よって, この曲線で囲まれる部分の面積は,

$$4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2\theta d\theta=4\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2$$

2.25.

(1) $y' = x$ より, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ である. ここで, $\sqrt{1+x^2} = t - x$ とおくと,

$$\sqrt{1+x^2} = t - x \Longrightarrow 1 + x^2 = t^2 - 2tx + x^2$$
$$\Longleftrightarrow x = \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}$$

これより

$$dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right)dt = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$$

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 1+\sqrt{2}$

. また,

$$\sqrt{1+x^2} = t - x = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx &= \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}dt \\
&= \frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}t^2 + 2\log|t| - \frac{1}{2t^2}\right]_1^{1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{8}\left[(1+\sqrt{2})^2 + 4\log(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[(1+\sqrt{2})^2 + 4\log(1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})^2\right] = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right\}
\end{aligned}$$

(2) $y' = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$ より, 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\tan^2 x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx
\end{aligned}$$

ここで, $\sin x = t$ とおくと, $\cos x dx = dt$,

x	$0 \to \dfrac{\pi}{3}$
t	$1 \to \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

. よって,

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2} dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= -\frac{1}{2} \left[\log|t-1| - \log|t+1| \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \log(2+\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

(3) $x' = -3\cos^2\theta \sin\theta$, $y' = 3\sin^2\theta\cos\theta$ より, 求める曲線の長さは

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2\theta\sin\theta)^2 + (3\sin^2\theta\cos\theta)^2} d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta} d\theta \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = 3[-\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6
\end{aligned}
$$

(4) $x' = e^t\cos 2\pi t - 2\pi e^t \sin 2\pi t$, $y' = e^t \sin 2\pi t + 2\pi e^t \cos 2\pi t$ より, 求める曲線の長さは

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{(e^t\cos 2\pi t - 2\pi e^t\sin 2\pi t)^2 + (e^t \sin 2\pi t + 2\pi e^t\cos 2\pi t)^2} dt \\
&= \sqrt{1+4\pi^2}\int_0^{\frac{3}{2}} e^t dt = \sqrt{1+4\pi^2}[e^t]_0^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1+4\pi^2}(e^{\frac{3}{2}}-1)
\end{aligned}
$$

2.26.

(1) $r' = 2\theta$ より, 求める曲線の長さは

$$
\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^4 + (2\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \theta\sqrt{4+\theta^2} d\theta
$$

ここで, $4+\theta^2 = t$ とおくと, $2\theta d\theta = dt$,

θ	$0 \to 2\pi$
t	$4 \to 4+4\pi^2$

. よって,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2} d\theta &= \frac{1}{2}\int_4^{4+4\pi^2} \sqrt{t} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_4^{4+4\pi^2} = \frac{8}{3}\left\{(1+\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right\}
\end{aligned}
$$

(2) $r' = -\sin\theta$ より, 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}d\theta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}d\theta - 2\int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2}d\theta \\ &= 2\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} - 2\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_{\pi}^{2\pi} = 8\end{aligned}$$

(3) $r' = \sin^2\dfrac{\theta}{3}\cos\dfrac{\theta}{3}$ より, 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^6\frac{\theta}{3} + \left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2}d\theta &= \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}}d\theta \\ &= \int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\theta}{3}d\theta \\ &= \int_0^{3\pi} \frac{1-\cos\frac{2}{3}\theta}{2}d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\right]_0^{3\pi} = \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

(4) $r' = e^{\theta}$ より, 求める曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2\theta}+e^{2\theta}}d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} e^{\theta}d\theta = \sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$$

(5) $r' = 4\cos^3\dfrac{\theta}{4}\left(-\sin\dfrac{\theta}{4}\right)\cdot\dfrac{1}{4} = -\cos^3\dfrac{\theta}{4}\sin\dfrac{\theta}{4}$ より, 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^8\frac{\theta}{4} + \cos^6\frac{\theta}{4}\sin^2\frac{\theta}{4}}d\theta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^6\frac{\theta}{4}}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^3\frac{\theta}{4}d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\frac{\theta}{4}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{4}\right)d\theta\end{aligned}$$

ここで, $\sin\dfrac{\theta}{4} = t$ とおくと, $\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{\theta}{4}d\theta = dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline \theta & 0\to 2\pi \\ \hline t & 0\to 1 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$与式 = \int_0^1 4(1-t^2)dt = \left[4t - \frac{4}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

(6) $r' = -e^{-\theta}$ より, 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sqrt{e^{-2\theta}+e^{-2\theta}}d\theta &= \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \sqrt{2}e^{-\theta}d\theta \\ &= \lim_{M\to+\infty}\sqrt{2}\left[-e^{-\theta}\right]_0^M \\ &= \lim_{M\to+\infty}\sqrt{2}\left(1-e^{-M}\right) = \sqrt{2}\end{aligned}$$

2.27. 定理 2.22 $\Longrightarrow$ 定理 2.21, 定理 2.21 $\Longrightarrow$ 定理 2.22, 定理 2.22 $\Longrightarrow$ 定理 2.23, 定理 2.23 $\Longrightarrow$ 定理 2.21 をそれぞれ示す.

(1) 定理 2.22 $\Longrightarrow$ 定理 2.21 を示す.
定理 2.22 において, $x = x$, $y = f(x)$ とおけば, 定理 2.22 より $a \leqq x \leqq b$ における曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{(x')^2+\{f'(x)\}^2}dx = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

となり, 定理 2.21 が得られた.

(2) 定理 2.21 $\Longrightarrow$ 定理 2.22 を示す.
$x = x(t)$, $y = y(t)$ とすると, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. また, $a \leqq x \leqq b$ のとき $\alpha \leqq t \leqq \beta$ とすれば, 定理 2.21 と定理 2.15' より

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\,|x'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

となり, 定理 2.22 が得られた.

(3) 定理 2.22 $\Longrightarrow$ 定理 2.23 を示す.
$r = f(\theta)$ より, この曲線上の点 (x, y) を極座標表示すると

$$\begin{cases} x(\theta) &= r\cos\theta &= f(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) &= r\sin\theta &= f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

これより,

$$\begin{cases} x'(\theta) &= f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \\ y(\theta) &= f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta \end{cases}$$

よって, 定理 2.22 より $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ における曲線の長さは

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\}^2 + \{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\}^2}d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}d\theta\end{aligned}$$

となり, 定理 2.23 を得る.

(4) 定理 2.23 $\Longrightarrow$ 定理 2.21 を示す.

$y=f(x)$ のとき, この曲線上の点 (x,y) を極座標表示する, すなわち, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.
このとき, $r\sin\theta = f(r\cos\theta)$ が成り立つ. ここで, r を θ の関数とみて両辺を θ で微分すると,

$$\begin{aligned} & r'\sin\theta + r\cos\theta = f'(r\cos\theta)\left\{r'\cos\theta - r\sin\theta\right\} \\ \Longleftrightarrow & r'\left\{\sin\theta - f'(r\cos\theta)\cos\theta\right\} = -r\left\{\cos\theta + f'(r\cos\theta)\sin\theta\right\} \\ \Longleftrightarrow & r' = -r\frac{\cos\theta + f'(r\cos\theta)\sin\theta}{\sin\theta - f'(r\cos\theta)\cos\theta} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} r^2 + (r')^2 &= r^2 + r^2\frac{\{\cos\theta + f'(r\cos\theta)\sin\theta\}^2}{\{\sin\theta - f'(r\cos\theta)\cos\theta\}^2} \\ &= r^2\frac{1 + f'(r\cos\theta)^2}{\{\sin\theta - f'(r\cos\theta)\cos\theta\}^2} \end{aligned}$$

よって, $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ としたとき, この曲線の長さは, 定理 2.23 より

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}d\theta = \int_\alpha^\beta r\sqrt{\frac{1 + f'(r\cos\theta)^2}{\{\sin\theta - f'(r\cos\theta)\cos\theta\}^2}}d\theta$$

ここで, $x = r\cos\theta$ とおくと,

$$\begin{aligned} dx &= (r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\ &= \left\{-r\frac{\cos\theta + f'(r\cos\theta)\sin\theta}{\sin\theta - f'(r\cos\theta)\cos\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right\}d\theta \\ &= -r\frac{1}{\sin\theta - f'(r\cos\theta)\cos\theta}d\theta \end{aligned}$$

また, $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ のとき $a \leqq x \leqq b$ とすれば, 定理 2.15' から

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_a^b r\sqrt{\frac{1 + f'(r\cos\theta)^2}{\{\sin\theta - f'(r\cos\theta)\cos\theta\}^2}}d\theta \cdot \left|\frac{\sin\theta - f'(r\cos\theta)\cos\theta}{-r}\right|dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}dx \end{aligned}$$

となり, 定理 2.21 を得た.

以上のことから, 定理 2.21, 定理 2.22, 定理 2.23 は互いに導きあえることが示された.

2.28.

(1) 回転体の体積は

$$\pi\int_0^1 x^6 dx = \pi\left[\frac{1}{7}x^7\right]_0^1 = \frac{1}{7}\pi$$

一方, $y' = 3x^2$ より, 回転体の表面積は

$$2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}dx = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx$$

ここで, $1+9x^4 = t$ とおくと, $36x^3dx = dt$,

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 10$

. よって,

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx &= 2\pi \int_1^{10} \frac{1}{36}\sqrt{t}dt \\ &= \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1) \end{aligned}$$

(2) 回転体の体積と表面積は, 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ までの部分を求めて 2 倍すればよい.

回転体の体積は

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx = \pi \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}$$

一方, $y' = -\sin x$ より, 回転体の表面積は

$$2 \times 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}dx$$

ここで, $\sin x = t$ とおくと, $\cos x dx = dt$,

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

. よって,

$$2 \times 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt$$

さらに, $\sqrt{1+t^2} = u - t$ とおくと,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+t^2} = u - t &\Longrightarrow 1 + t^2 = u^2 - 2tu + t^2 \\ &\Longleftrightarrow t = \frac{u^2-1}{2u} = \frac{u}{2} - \frac{1}{2u} \end{aligned}$$

より, $dt = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2u^2}\right)du = \dfrac{u^2+1}{2u^2}du$. また,

t	$0 \to 1$
u	$1 \to 1+\sqrt{2}$

,

$$\sqrt{1+t^2} = u - t = \frac{u^2+1}{2u}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt \\
&= 4\pi \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{u^2+1}{2u} \cdot \frac{u^2+1}{2u^2} du \\
&= \pi \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(u + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^3} \right) du \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}u^2 + 2\log u - \frac{1}{2u^2} \right]_1^{1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\pi \left\{ (1+\sqrt{2})^2 + 4\log(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\pi \left\{ (1+\sqrt{2})^2 + 4\log(1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})^2 \right\} \\
&= 2\pi \left\{ \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}) \right\}
\end{aligned}
$$

例題と演習で学ぶ　微分積分学　演習問題解答
(第 6 刷にも対応)

第 3 章

3.1.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,2)}(2x+y) = 2(-1)+2 = 0.$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2xy}{x^2-y} = \frac{2\times1\times2}{1^2-2} = -4.$

(3) （第 5 刷まで）$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

ゆえに, θ の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない.

(4) （第 6 刷）$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0}\frac{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}{r^2} = 1+2\cos\theta\sin\theta$$

ゆえに, θ の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない.

(5) $y = mx^2$ とおくと, $(x,y)\to(0,0)$ より $x\to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+mx^2} = \frac{1}{1+m}$$

ゆえに, m の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない.

(6) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2} \\ &= \lim_{r\to0} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta = 0\end{aligned}$$

【別解】　相加相乗平均の不等式 $x^2y^2 \leqq \dfrac{x^4+y^4}{2}$ より,

$$\begin{aligned}0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} &\le \frac{x^4+y^4}{2(x^2+y^2)} \\ &= \frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{2(x^2+y^2)} \\ &\le \frac{(x^2+y^2)^2}{2(x^2+y^2)} = \frac{x^2+y^2}{2}\end{aligned}$$

ここで, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2} = 0$ より, はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$.

(7) $y = mx^3$ とおくと, $(x,y) \to (0,0)$ より $x \to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^3+y} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^3+mx^3} = \frac{m}{1+m}$$

ゆえに, m の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない.

(8) $-1 \leqq \sin\dfrac{y}{x} \leqq 1$ より, $-x^2 \leqq x^2 \sin\dfrac{y}{x} \leqq x^2$. よって, はさみうちの原理より, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \sin\frac{y}{x} = 0$.

(9) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y) \to (0,0)$ より, $r \to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{r^2} = 1$$

(10) $y = mx$ とおくと, $(x,y) \to (0,0)$ より $x \to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x}{2x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2x+mx} = \frac{3}{2+m}$$

ゆえに, m の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない.

3.2.

(1) $f(0,0) = -1$ より, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続である. よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ を計算すれば良い.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{2\times 0-1}{\sqrt{0^2+0^2+1}} = -1$$

よって, $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続である.

(2) $f(0,0) = 0$ より, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続である. よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ を計算すれば良い. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y) \to (0,0)$ より, $r \to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

ゆえに, θ の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない. よって, $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続ではない.

(3) $f(0,0)=0$ より, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続となる. よって, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ を計算すればよい. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta-\sin^3\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta-\sin^3\theta) = 0$$

よって, $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続である.

【極限の計算の別解】

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| &= \left|\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+y^2}\right| \\ &= |x-y|\left|1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \\ &\leqq |x-y|\left(1+\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\right) \\ &\leqq |x-y|\left(1+\frac{x^2+y^2}{2(x^2+y^2)}\right) = \frac{3}{2}|x-y| \end{aligned}$$

ここで, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}|x-y| = 0$ より, はさみうち原理から $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$.

(4) $f(0,0)=0$ より $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続となる. よって, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ を計算すればよい. $\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leqq 1$ より,

$$0 \leqq \left|xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leqq |xy|$$

ここで, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$ より, はさみうちの原理から $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\cos\frac{1}{x^2+y^2} = 0$ となるので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続である.

3.3. $f_x(x,y)$ は y を定数とみて x で微分をすればよい, また, $f_y(x,y)$ は x を定数とみて y で微分をすればよい. なお, 数式を x で偏微分する場合は $(\text{数式})_x$ と書くことにする. または 数式を y で偏微分する場合は $(\text{数式})_y$ と書くことにする.

(1) $f_x(x,y) = (x^2)_x + (2xy)_x + (xy^3)_x = 2x+2y+y^3$,
$f_y(x,y) = (x^2)_y + (2xy)_y + (xy^3)_y = 2x+3xy^2$

(2) $f_x(x,y) = \frac{-y}{(x+y)^2}(x+y)_x = -\frac{y}{(x+y)^2}$,

$$f_y(x,y) = \frac{(x+y)_y y-(x+y)y_y}{(x+y)^2} = \frac{y-(x+y)}{(x+y)^2} = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

(3) $f_x(x,y) = \dfrac{-(x^2-y^2)_x}{(x^2-y^2)^2} = -\dfrac{2x}{(x^2-y^2)^2}$,

$f_y(x,y) = \dfrac{-(x^2-y^2)_y}{(x^2-y^2)^2} = \dfrac{2y}{(x^2-y^2)^2}$

(4) $f_x(x,y) = 1 - y + \dfrac{1}{y^2}$,

$f_y(x,y) = 3 - x - \dfrac{x(y^2)_y}{y^4} = 3 - x - \dfrac{2x}{y^3}$

(5) $f(x,y) = (\sqrt{x} - y)^2 = x - 2x^{\frac{1}{2}}y + y^2$ より,

$f_x(x,y) = 1 - x^{-\frac{1}{2}}y = 1 - \dfrac{y}{\sqrt{x}}$

$f_y(x,y) = -2x^{\frac{1}{2}} + 2y = -2\sqrt{x} + 2y$

(6) $f_x(x,y) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\left(\dfrac{x}{y}\right)_x = \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \dfrac{y}{y^2} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$,

$f_y(x,y) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\left(\dfrac{x}{y}\right)_y = \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$

(7) $f_x(x,y) = (xy)_x \cos(x+y) + xy\{\cos(x+y)\}_x = y\cos(x+y) - xy\sin(x+y)$,

$f_y(x,y) = (xy)_y \cos(x+y) + xy\{\cos(x+y)\}_y = x\cos(x+y) - xy\sin(x+y)$

(8) $f_x(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x+y^2)_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x+y^2}}$,

$f_y(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x+y^2)_y = \dfrac{2y}{2\sqrt{x+y^2}} = \dfrac{y}{\sqrt{x+y^2}}$

(9) $f_x(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\left(\dfrac{x}{y}\right)_x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$,

$f_y(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\left(\dfrac{x}{y}\right)_y = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = -\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$

3.4.

(1) $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分係数を求めればよい．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(x+\frac{1}{\sqrt{2}}r, y-\frac{1}{\sqrt{2}}r) - f(x,y)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\Bigg[\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}r\right)^2 + \left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}r\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}r\right) + \left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}r\right)^2 \\
&\qquad\qquad - (x^2+xy+y^2)\Bigg] \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\Bigg[x^2 + \sqrt{2}rx + \frac{1}{2}r^2 + xy - \frac{1}{\sqrt{2}}rx + \frac{1}{\sqrt{2}}ry - \frac{1}{2}r^2 \\
&\qquad\qquad + y^2 - \sqrt{2}ry + \frac{1}{2}r^2 - x^2 - xy - y^2\Bigg] \\
&= \lim_{r\to 0}\left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2}r - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2}y\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)
\end{aligned}
$$

(2) $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ である．よって，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) - f(x,y)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\left[3(x+r\cos\theta)^2 + 2(x+r\cos\theta)(y+r\sin\theta) - (3x^2+2xy)\right] \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\Big[3x^2 + 6rx\cos\theta + 3r^2\cos^2\theta + 2xy + 2ry\cos\theta \\
&\qquad\qquad + 2rx\sin\theta + 2r^2\sin\theta\cos\theta - 3x^2 - 2xy\Big] \\
&= \lim_{r\to 0}[6x\cos\theta + 3r\cos^2\theta + 2y\cos\theta + 2x\sin\theta + 2r\sin\theta\cos\theta] \\
&= 6x\cos\theta + 2y\cos\theta + 2x\sin\theta
\end{aligned}
$$

3.5.

(1) $f(x,y) = f(1,2) + P(x-1) + Q(y-2) + g(x,y)$ とおく．このとき，

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= f(x,y) - f(1,2) - P(x-1) - Q(y-2) \\
&= xy - 2 - P(x-1) - Q(y-2)
\end{aligned}
$$

である．このとき，

$$
(*) \quad \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2-P(x-1)-Q(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0
$$

となる定数 P, Q が存在すれば, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,2)$ で全微分可能である. $\begin{cases} x-1=r\cos\theta \\ y-2=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(1,2)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2-P(x-1)-Q(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta+1)(r\sin\theta+2)-2-Pr\cos\theta-Qr\sin\theta}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\left[r^2\sin\theta\cos\theta+r\sin\theta+2r\cos\theta+2-2-Pr\cos\theta-Qr\sin\theta\right] \\
&= \lim_{r\to 0}\left[r\sin\theta\cos\theta+2(1-P)\cos\theta+(1-Q)\sin\theta\right] \\
&= 2(1-P)\cos\theta+(1-Q)\sin\theta
\end{aligned}$$

よって, $P=Q=1$ ならば $(*)$ が成り立つので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,2)$ で全微分可能である.

(2) $f(x,y)=f(2,-1)+P(x-2)+Q(y+1)+g(x,y)$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= f(x,y)-5-P(x-2)-Q(y+1) \\
&= x^2+y^2-5-P(x-2)-Q(y+1)
\end{aligned}$$

である. このとき,

$$(**) \qquad \begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^2+y^2-5-P(x-2)-Q(y+1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0
\end{aligned}$$

となる定数 P, Q が存在すれば, $f(x,y)$ は $(x,y)=(2,-1)$ で全微分可能である. $\begin{cases} x-2=r\cos\theta \\ y+1=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(2,-1)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^2+y^2-5-P(x-2)-Q(y+1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta+2)^2+(r\sin\theta-1)^2-5-Pr\cos\theta-Qr\sin\theta}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\left[r^2\cos^2\theta+4r\cos\theta+4+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1-5-Pr\cos\theta-Qr\sin\theta\right] \\
&= \lim_{r\to 0}\left[r+4\cos\theta-2\sin\theta-P\cos\theta-Q\sin\theta\right] \\
&= (4-P)\cos\theta-(Q+2)\sin\theta
\end{aligned}$$

より, $P=4$, $Q=-2$ なら $(**)$ が成り立つ. よって $f(x,y)$ は $(x,y)=(2,-1)$ で全微分可能である.

(3) $f(x,y)=f(0,0)+Px+Qy+g(x,y)$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f(x,y)-Px-Qy \\ &= \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}-Px-Qx & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases} \end{aligned}$$

である．このとき，

$$(***) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-(Px+Qy)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)} = 0$$

となる定数 P,Q が存在すれば，$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能である．

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく．$(x,y)\to(0,0)$ より，$r\to 0$．よって，

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-(Px+Qy)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\left(r^3\cos^2\theta\sin\theta-Pr^2\cos\theta-Qr^2\sin\theta\right) \\ &= \lim_{r\to 0}\left(r\cos^2\theta\sin\theta-P\cos\theta-Q\sin\theta\right) \\ &= -P\cos\theta-Q\sin\theta \end{aligned}$$

より，$P=Q=0$ なら $(***)$ が成り立つ．よって $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能である．

(4) $f(x,y)=f(0,0)+Px+Qy+g(x,y)$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f(x,y)-Px-Qy \\ &= \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}-Px-Qx & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases} \end{aligned}$$

である．このとき，

$$(1) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y-(Px+Qy)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)} = 0$$

となる定数 P,Q が存在すれば，$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能である．

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく．$(x,y)\to(0,0)$ より，$r\to 0$．よって，

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y-(Px+Qy)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\left(r\cos\theta+r\sin\theta-Pr^2\cos\theta-Qr^2\sin\theta\right) \\ &= \lim_{r\to 0}\left\{\frac{1}{r}(\cos\theta+\sin\theta)-P\cos\theta-Q\sin\theta\right\} \end{aligned}$$

となり, (1) をみたす定数 P, Q は存在しない. よって $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能ではない.

3.6.

(1) $f_x(x,y)=2xy-y^2$ と $f_y(x,y)=x^2-2xy$ は共に $(x,y)=(1,1)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で全微分可能である.
$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{2}$ より, $\boldsymbol{v}'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}$ 方向における方向微分係数を求めればよい.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}'}f(1,1)=f_x(1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-f_y(1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

(2) $f_x(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y)=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$ は共に $(x,y)=(1,1)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で全微分可能である.
$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{5}$ より, $\boldsymbol{v}'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v}$ 方向における方向微分係数を求めればよい.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}'}f(1,1)=f_x(1,1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-f_y(1,1)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{3}{2\sqrt{5}}$$

(3) $f_x(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は共に $(x,y)=(1,1)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で全微分可能である. よって,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}f(1,1)=f_x(1,1)\cos\theta-f_y(1,1)\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)$$

(4) $f_x(x,y)=\log(x+y)+\dfrac{x}{x+y}$, $f_y(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$ は共に $(x,y)=(1,1)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で全微分可能である.
$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{5}$ より, $\boldsymbol{v}'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v}$ 方向における方向微分係数を求めればよい.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}'}f(1,1)=f_x(1,1)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-f_y(1,1)\cdot\frac{3}{5}=-\frac{4}{5}\log 2-\frac{1}{10}$$

3.7.

(1) $f_x(x,y)=y^2$, $f_y(x,y)=2xy$ は共に $(x,y)=(1,2)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,2)$ で全微分可能である. よって, $(x,y)=(1,2)$ における接平面の方程式は,

$$\begin{aligned}&z=f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)+f(1,2)\\ \Longleftrightarrow\ &z=4x+4y-9\end{aligned}$$

(2) 最初に $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ を計算する. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r \to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ は存在しない為 $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続ではないので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能ではない.

(3) $f_x(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $f_y(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ は共に $(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で全微分可能である. よって, $(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接平面の方程式は,

$$z = f_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\Longleftrightarrow z = \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{\sqrt{6}}{3}y - \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$$

(4) $f_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$ は共に $(x,y)=(1,1)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で全微分可能である. よって, $(x,y)=(1,1)$ における接平面の方程式は,

$$z = f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + f(1,1)$$
$$\Longleftrightarrow z = x + y - 2 + \log 2$$

3.8.

(1) 最初に $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ として, $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分係数を求める.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} f(0,0) = \lim_{r\to 0} \frac{f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)}{r}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^{\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta}{r} = \cos^{\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta$$

よって, $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において任意の方向に方向微分可能である.
　次に $f(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能ではないことを示そう.

$$f(x,y) = f(0,0) + Px + Qy + g(x,y) = Px + Qy + g(x,y)$$

とおいて,

$$(*) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

となる定数 P, Q が存在すれば $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能である.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-Px-Qy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ここで, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-Px-Qy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\left(r\cos^{\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta - Pr\cos\theta - Qr\sin\theta\right) \\
&= \cos^{\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta - P\cos\theta - Q\sin\theta
\end{aligned}$$

ここで, $\theta=0$ のとき $(*)$ を満たすためには $P=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $(*)$ を満たすためには $Q=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき $(*)$ を満たすためには $P+Q=1$ でなければならないが, これらを全てみたす定数 P,Q は存在しない. よって $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能ではない.

3.9.

(1) $f_x(x,y)=2x+y,\ f_y(x,y)=x$ より,

$$f_{xx}(x,y)=2,\ f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=1,\ f_{yy}(x,y)=0.$$

(2) $f_x(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$,

$f_y(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$ より,

$$f_{xx}(x,y)=\left\{(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}_x=-\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=\frac{x}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=-\frac{y}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\begin{aligned}
f_{yy}(x,y)&=\frac{x}{y^2(y^2-x^2)}\left\{\sqrt{y^2-x^2}+\frac{2y^2}{\sqrt{y^2-x^2}}\right\} \\
&=\frac{x}{y^2(y^2-x^2)}\cdot\frac{3y^2-x^2}{\sqrt{y^2-x^2}}=\frac{3xy^2-x^3}{y^2(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

(3) $f_x(x,y) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$,
$f_y(x,y) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$ より,

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_{yy}(x,y) = -\frac{x\cdot(-2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

(4) $f_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $f_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$ より,

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}\left\{\sqrt{x^2-y^2} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right\}$$
$$= \frac{x^2-y^2-x^2}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y^2}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{x}{x^2-y^2}\cdot\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right) = \frac{xy}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}\left\{-\sqrt{x^2-y^2} + y\cdot\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)\right\}$$
$$= \frac{-x^2+y^2-y^2}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x^2}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(5) $f_x(x,y) = yx^{y-1}$, $f_y(x,y) = x^y \log x$ より,

$$f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\log x = x^{y-1}(1+y\log x)$$
$$f_{yy}(x,y) = x^y(\log y)^2$$

(6) $f_x(x,y) = e^{x-y}$, $f_y(x,y) = -e^{x-y}$ より,
$f_{xx}(x,y) = e^{x-y}$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -e^{x-y}$, $f_{yy}(x,y) = e^{x-y}$

3.10.

(1) $f_x(x,y) = 2xy^3$, $f_y(x,y) = 3x^2y^2$
$f_{xx}(x,y) = 2y^3$, $f_{xy}(x,y) = 6xy^2$, $f_{yy}(x,y) = 6x^2y$ より,
$f_{xxx}(x,y) = 0$, $f_{xxy}(x,y) = f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y) = 6y^2$,
$f_{xyy}(x,y) = f_{yxy}(x,y) = f_{yyx}(x,y) = 12xy$, $f_{yyy}(x,y) = 6x^2$

(2) $f(x,y) = xy^{-1}$ から, $f_x(x,y) = y^{-1}$, $f_y(x,y) = -xy^{-2}$,
$f_{xx}(x,y) = 0$, $f_{xy}(x,y) = -y^{-2}$, $f_{yy}(x,y) = 2xy^{-3}$.
よって, $f_{xxx}(x,y) = 0$, $f_{xxy}(x,y) = f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y) = 0$,
$f_{xyy}(x,y) = f_{yxy}(x,y) = f_{yyx}(x,y) = 2y^{-3}$, $f_{yyy}(x,y) = -6xy^{-4}$

(3) $f(x,y) = y(x+y)^{-1}$ より,
$f_x(x,y) = -y(x+y)^{-2}$,
$f_y(x,y) = (x+y)^{-1} - y(x+y)^{-2} = (x+y)^{-2}(x+y-y) = x(x+y)^{-2}$,

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 2y(x+y)^{-3}, \\
f_{xy}(x,y) &= -(x+y)^{-2} + 2y(x+y)^{-3} \\
&= (x+y)^{-3}(-x-y+2y) = (y-x)(x+y)^{-3}, \\
f_{yy} &= -2x(x+y)^{-3}
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(x,y) &= -6y(x+y)^{-4} \\
f_{xxy}(x,y) &= f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y) \\
&= 2(x+y)^{-3} - 6y(x+y)^{-4} \\
&= (x+y)^{-4}(2x+2y-6y) \\
&= 2(x-2y)(x+y)^{-4} \\
f_{xyy}(x,y) &= f_{yxy}(x,y) = f_{yyx}(x,y) \\
&= (x+y)^{-3} - 3(y-x)(x+y)^{-4} \\
&= (x+y)^{-4}(x+y-3y+3x) \\
&= 2(2x-y)(x+y)^{-4} \\
f_{yyy}(x,y) &= 6x(x+y)^{-4}
\end{aligned}$$

(4) $f_x(x,y) = y\cos xy$, $f_y(x,y) = x\cos xy$,
$f_{xx}(x,y) = -y^2\sin xy$, $f_{xy}(x,y) = \cos xy - xy\sin xy$, $f_{yy}(x,y) = -x^2\sin xy$
より,

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(x,y) &= -y^3\cos xy \\
f_{xxy}(x,y) &= f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y) \\
&= -2y\sin xy - xy^2\cos xy \\
f_{xyy}(x,y) &= f_{yxy}(x,y) = f_{yyx}(x,y) \\
&= -x\sin xy - x\sin xy - x^2y\cos xy \\
&= -2x\sin xy - x^2y\cos xy \\
f_{yyy}(x,y) &= -x^3\cos xy
\end{aligned}$$

3.11.

(1) $\begin{cases} u = x^2y + x \\ v = xy \end{cases}$ とおくと，$f(u,v) = \sqrt{u} + \cos v$. よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{u}}(2xy+1) - \sin v \cdot y \\
&= \frac{2xy+1}{2\sqrt{x^2y+1}} - y\sin xy \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot x^2 - \sin v \cdot x \\
&= \frac{x^2}{2\sqrt{x^2y+1}} - x\sin xy
\end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} u = x^2 + e^{xy} \\ v = x\cos(x+y) \end{cases}$ とおくと，$f(u,v) = \dfrac{u}{v}$. よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{1}{v}(2x + ye^{xy}) - \frac{u}{v^2}\{\cos(x+y) - x\sin(x+y)\} \\
&= \frac{2x+ye^{xy}}{x\cos(x+y)} - \frac{x^2+e^{xy}}{x^2\cos^2(x+y)}\{\cos(x+y) - x\sin(x+y)\} \\
&= \frac{1}{x^2\cos^2(x+y)}\Big\{(2x+ye^{xy})x\cos(x+y) - (x^2+e^{xy})\cos(x+y) \\
&\qquad\qquad + (x^2+e^{xy})x\sin(x+y)\Big\} \\
&= \frac{x^2+(xy-1)e^{xy}}{x^2\cos(x+y)} + \frac{(x^2+e^{xy})\sin(x+y)}{x\cos^2(x+y)} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{1}{v}\cdot xe^{xy} - \frac{u}{v^2}\{-x\sin(x+y)\} \\
&= \frac{xe^{xy}}{x\cos(x+y)} - \frac{-x(x^2+e^{xy})\sin(x+y)}{x^2\cos^2(x+y)} \\
&= \frac{e^{xy}}{\cos(x+y)} + \frac{(x^2+e^{xy})\sin(x+y)}{x\cos^2(x+y)}
\end{aligned}$$

(3) $\begin{cases} u = xy - y^2 \\ v = xy \end{cases}$ とおくと，$f(u, v) = u\cos v$. よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \cos v \cdot y + (-u\sin v)y \\
&= y\cos xy - (xy^2 - y^3)\sin xy \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \cos v \cdot (x - 2y) + (-u\sin v)x \\
&= (x - 2y)\cos xy - (x^2y - xy^2)\sin xy
\end{aligned}$$

(4) $\begin{cases} u = \sqrt{x - y} \\ v = x^2y \end{cases}$ とおくと，$f(u, v) = \tan^{-1}\dfrac{v}{u}$. よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{1}{1 + (\frac{v}{u})^2} \cdot \left(-\frac{v}{u^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - y}} + \frac{1}{1 + (\frac{v}{u})^2} \cdot \frac{1}{u} \cdot 2xy \\
&= -\frac{v}{u^2 + v^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - y}} + \frac{u}{u^2 + v^2} \cdot 2xy \\
&= \frac{1}{x - y + x^4y^2}\left\{-\frac{x^2y}{2\sqrt{x - y}} + 2xy\sqrt{x - y}\right\} \\
&= \frac{-x^2y + 4x^2y - 4xy^2}{2(x - y + x^4y^2)\sqrt{x - y}} = \frac{3x^2y - 4xy^2}{2(x - y + x^4y^2)\sqrt{x - y}} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= -\frac{v}{u^2 + v^2} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x - y}}\right) + \frac{u}{u^2 + v^2} \cdot x^2 \\
&= \frac{1}{(x - y + x^4y^2)}\left(\frac{x^2y}{2\sqrt{x - y}} + x^2\sqrt{x - y}\right) \\
&= \frac{x^2y + 2x^3 - 2x^2y}{2(x - y + x^4y^2)\sqrt{x - y}} = \frac{2x^3 - x^2y}{2(x - y + x^2y)\sqrt{x - y}}
\end{aligned}$$

3.12. $\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$ とおく.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,$

$\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\theta,$

よって,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\
&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)^2 \\
&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta \\
&\qquad\qquad+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta-2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta \\
&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}
$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}=z_x\cos\theta+z_y\sin\theta$ より,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}&=\frac{\partial z_x}{\partial u}\cos\theta+\frac{\partial z_y}{\partial u}\sin\theta \\
&=\left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\sin\theta \\
&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta \\
&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

一方, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}=-z_x\sin\theta+z_y\cos\theta$ より,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}&=-\frac{\partial z_x}{\partial v}\sin\theta+\frac{\partial z_y}{\partial v}\cos\theta \\
&=-\left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\sin\theta+\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\cos\theta \\
&=-\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cos\theta\right)\sin\theta+\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos\theta\right)\cos\theta \\
&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta
\end{aligned}
$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta\\&\quad+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

3.13. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. このとき,

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=z_x\cos\theta+z_y\sin\theta$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}&=\frac{\partial z_x}{\partial r}\cos\theta+\frac{\partial z_y}{\partial r}\sin\theta\\&=\left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\sin\theta\\&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\theta}&=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}\\&=-z_xr\sin\theta+z_yr\cos\theta\\&=-yz_x+xz_y\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}&=-\left(\frac{\partial yz_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial yz_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)+\left(\frac{\partial xz_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial xz_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\\&=-\left\{-y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r\sin\theta+\left(z_x+y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)r\cos\theta\right\}\\&\quad+\left\{-\left(z_y+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)r\sin\theta+x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r\cos\theta\right\}\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta-z_xr\cos\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}r^2\sin\theta\cos\theta\\&\quad-z_yr\sin\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2\theta \\
&\qquad + \frac{1}{r}\left(z_x \cos\theta + z_y \sin\theta\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} r^2 \sin^2\theta - z_x r\cos\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} r^2 \sin\theta\cos\theta\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - z_y r \sin\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r^2 \cos^2\theta\right) \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

3.14.

(1) $f_x(x,y) = 2x + 3y,\ f_y(x,y) = 3x + 2y.$
$f_{xx}(x,y) = 2,\ f_{xy}(x,y) = 3,\ f_{yy}(x,y) = 2$ より,

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{2x+3y}{3x+2y} \\
\varphi''(x) &= -\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)^2 - 2f_{xy}(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y) + f_{yy}(x,y)f_x(x,y)^2}{f_y(x,y)^3} \\
&= -\frac{2(3x+2y)^2 - 6(2x+3y)(3x+2y) + 2(2x+3y)^2}{(3x+2y)^3} \\
&= \frac{10(x^2+3xy+y^2)}{(3x+2y)^3} \\
&= \frac{10}{(3x+2y)^3}
\end{aligned}
$$

ここで, 最後の等号は, 陰関数 $\varphi(x)$ が $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 - 1 = 0$ によって定められていることを利用した.

(2) $f_x(x,y) = 3x^2 - 2x,\ f_y(x,y) = 2y,$
$f_{xx}(x,y) = 6x - 2,\ f_{xy}(x,y) = 0,\ f_{yy}(x,y) = 2$ より,

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{3x^2-2x}{2y} \\
\varphi''(x) &= -\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)^2 - 2f_{xy}(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y) + f_{yy}(x,y)f_x(x,y)^2}{f_y(x,y)^3} \\
&= -\frac{(6x-2)\cdot 4y^2 + 2(3x^2-2x)^2}{8y^3} \\
&= -\frac{12xy^2 - 4y^2 + 9x^4 - 12x^3 + 4x^2}{4y^3}
\end{aligned}
$$

コメント. 第 5 刷までの解答は $f(x,y)=x^3-x^2+y^2-1=0$ という関係式を利用して変形したものです。変形が複雑になっていましたので、上記解答では関係式を利用しませんでした。第 6 刷の解答は誤植です。申し訳ありません。

(3) $f_x(x,y)=y^2-2xy,\ f_y(x,y)=2xy-x^2,$
$f_{xx}(x,y)=-2y,\ f_{xy}(x,y)=2y-2x,\ f_{yy}(x,y)=2x$ より,

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{y^2-2xy}{2xy-x^2}=\frac{y^2-2xy}{x^2-2xy}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x)&=-\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)^2-2f_{xy}(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y)+f_{yy}(x,y)f_x(x,y)^2}{f_y(x,y)^3}\\&=-\frac{-2y(2xy-x^2)^2-2(2y-2x)(y^2-2xy)(2xy-x^2)+2x(y^2-2xy)^2}{(2xy-x^2)^3}\\&=-\frac{-2yx^2(2y-x)^2-4xy(y-x)(y-2x)(2y-x)+2xy^2(y-2x)^2}{x^3(2y-x)^3}\\&=-\frac{-2xy(2y-x)^2-4y(y-x)(y-2x)(2y-x)+2y^2(y-2x)^2}{x^2(2y-x)^3}\\&=\frac{6y(2x^2y-2xy^2+y^3-x^3)}{x^2(2y-x)^3}\\&=\frac{6y(-4+y^3-x^3)}{x^2(2y-x)^3}\\&=-\frac{6y(x^3-y^3+4)}{x^2(2y-x)^3}\end{aligned}$$

ここで, 最後から 2 番目の等号は, 陰関数 $\varphi(x)$ が $f(x,y)=xy^2-x^2y-2=0$ によって定められていることを利用した.

(4) $f_x(x,y)=2x+y,\ f_y(x,y)=x-2y,$
$f_{xx}(x,y)=2,\ f_{xy}(x,y)=1,\ f_{yy}(x,y)=-2$ より,

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{2x+y}{x-2y}\\\varphi''(x)&=-\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)^2-2f_{xy}(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y)+f_{yy}(x,y)f_x(x,y)^2}{f_y(x,y)^3}\\&=-\frac{2(x-2y)^2-2(2x+y)(x-2y)-2(2x+y)^2}{(x-2y)^3}\\&=-\frac{2(-5x^2+5y^2-5xy)}{(x-2y)^3}\\&=\frac{10}{(x-2y)^3}\end{aligned}$$

ここで, 最後の等号は, 陰関数 $\varphi(x)$ が $f(x,y)=x^2+xy-y^2-1=0$ によって定められていることを利用した.

(5) $f_x(x,y)=e^x-e^{x+y}$, $f_y(x,y)=-e^{x+y}+e^y$,
$f_{xx}(x,y)=e^x-e^{x+y}$, $f_{xy}(x,y)=-e^{x+y}$, $f_{yy}(x,y)=-e^{x+y}+e^y$ より,

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{e^x-e^{x+y}}{-e^{x+y}+e^y}=-\frac{-e^y}{-e^x}=-e^{y-x}\quad(*)$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x)&=-\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)^2-2f_{xy}(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y)+f_{yy}(x,y)f_x(x,y)^2}{f_y(x,y)^3}\\&=-\frac{(e^x-e^{x+y})(-e^{x+y}+e^y)^2+2e^{x+y}(e^x-e^{x+y})(-e^{x+y}+e^y)+(-e^{x+y}+e^y)(e^x-e^{x+y})^2}{(-e^{x+y}+e^y)^3}\\&=-\frac{(e^x-e^{x+y})(-e^{x+y}+e^y)(-e^{x+y}+e^y+2e^{x+y}+e^x-e^{x+y})}{(-e^{x+y}+e^y)^3}\\&=-\frac{(e^x-e^{x+y})(e^x+e^y)}{(-e^{x+y}+e^y)^2}\\&=-\frac{-e^y\cdot e^{x+y}}{(-e^x)^2}=e^{2y-x}\qquad(*)\end{aligned}$$

ここで, $(*)$ の等号は, 陰関数 $\varphi(x)$ が $f(x,y)=e^x-e^{x+y}+e^y=0$ によって定められていることを利用した.
コメント. 第５刷までの解答は正しいが、上記解答ではより簡単な形に変形をした。第６刷では $\varphi'(x)$ が誤植です。申し訳ありません。

3.15.

(1) $f_x(x,y)=2x$, $f_y(x,y)=2y$, $f_{xx}(x,y)=2$ である. 連立方程式

$$\begin{cases}f(x,y)=x^2+y^2-1=0\\f_x(x,y)=2x=0\end{cases}$$

を解くと, $(x,y)=(0,\pm1)$. ここで, $f_y(0,\pm1)=\pm2\neq0$ (複号同順) である. また, $\dfrac{f_{xx}(0,\pm1)}{f_y(0,\pm1)}=\pm1$ (複号同順) より, $x=0$ のとき, 極大で, 極大値は $y=1$, $x=0$ のとき, 極小で, 極小値は $y=-1$ である.

(2) $f_x(x,y)=\dfrac{1}{2}x$, $f_y(x,y)=2y$, $f_{xx}(x,y)=\dfrac{1}{2}$ である. 連立方程式

$$\begin{cases}f(x,y)=\frac{1}{4}x^2+y^2-1=0\\f_x(x,y)=\frac{1}{2}x=0\end{cases}$$

を解くと, $(x,y)=(0,\pm1)$. ここで, $f_y(0,\pm1)=\pm2\neq0$ (複号同順) である. また, $\dfrac{f_{xx}(0,\pm1)}{f_y(0,\pm1)}=\pm\dfrac{1}{4}$ (複号同順) より, $x=0$ のとき, 極大で, 極大値は $y=1$, $x=0$ のとき, 極小で, 極小値は $y=-1$ である.

(3) $f_x(x,y)=2x-y$, $f_y(x,y)=-x+2y$, $f_{xx}(x,y)=2$ である. 連立方程式

$$\begin{cases}f(x,y)=x^2-xy+y^2-1=0&\cdots\cdots(\mathrm{a})\\f_x(x,y)=2x-y=0&\cdots\cdots(\mathrm{b})\end{cases}$$

を解こう．(b) 式より, $y = 2x$ を得る．これを (a) 式に代入すると, $3x^2 = 1$ を得る．よって $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. また, $y = 2x$ から, $(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (複号同順) を得る．ここで, $f_y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \pm\sqrt{3} \neq 0$ (複号同順) である．また, $\dfrac{f_{xx}(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}})}{f_y(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}})} = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ (複号同順) より, $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 極大で, 極大値は $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 極小で, 極小値は $y = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である．

(4) $f_x(x, y) = 3x^2 - 3y$, $f_y(x, y) = -3x + 3y^2$, $f_{xx}(x, y) = 6x$ である．連立方程式

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0 & \cdots\cdots \text{(a)} \\ f_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0 & \cdots\cdots \text{(b)} \end{cases}$$

を解こう．(b) 式より $y = x^2$. これを (a) 式に代入すると, $x^3(x^3 - 2) = 0$ を得る．これより $x = 0, \sqrt[3]{2}$. また, $y = x^2$ から $(x, y) = (0, 0), (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ を得る．ここで, $f_y(0, 0) = 0$ より $x = 0$ では極値をとらない．また,

$$\begin{aligned} f_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) &= -3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{16} \\ &= -3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = -3\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} \neq 0 \end{aligned}$$

である．$\dfrac{f_{xx}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})}{f_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})} = 2 > 0$ より, $x = \sqrt[3]{2}$ のとき極大で, 極大値は $y = \sqrt[3]{4}$ である．

3.16.

(1) $f_x(x, y) = 2x + y$, $f_y(x, y) = x + 4y - 4$,
$f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 1$, $f_{yy}(x, y) = 4$ である．
ここで, $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = 7$ とおく．
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x + y = 0 \\ f_y(x, y) = x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

を解くと, $(x, y) = \left(-\dfrac{4}{7}, \dfrac{8}{7}\right)$ を得る．このとき,

$$H\left(-\frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right) = 7, \quad f_{xx}\left(-\frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right) = 2 > 0$$

である．よって, $(x, y) = \left(-\dfrac{4}{7}, \dfrac{8}{7}\right)$ のとき極小で, 極小値は $f\left(-\dfrac{4}{7}, \dfrac{8}{7}\right) = -\dfrac{16}{7}$ である．

(2) $f_x(x, y) = 3x^2 + 2y - 1$, $f_y(x, y) = 2x - 2$,
$f_{xx}(x, y) = 6x$, $f_{xy}(x, y) = 2$, $f_{yy}(x, y) = 0$ である．
ここで, $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = -4 < 0$ となるので, $f(x, y)$ は極値を持たない．

(3) $f_x(x,y) = 3x^2 + 2x - 1,\ f_y(x,y) = 3y^2 + 2y - 1,$
$f_{xx}(x,y) = 6x + 2,\ f_{xy}(x,y) = 0,\ f_{yy}(x,y) = 6y + 2$ である.
ここで, $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 4(3x+1)(3y+1)$ とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 & \cdots\cdots \text{(a)} \\ f_y(x,y) = 3y^2 + 2y - 1 = 0 & \cdots\cdots \text{(b)} \end{cases}$$

を解こう. (a) 式から $(3x-1)(x+1) = 0$. よって, $x = \dfrac{1}{3}, -1$ を得る. (b) 式から $(3y-1)(y+1) = 0$. よって, $y = \dfrac{1}{3}, -1$ を得る. これより, 連立方程式の解は $(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right), \left(-1, \dfrac{1}{3}\right), \left(\dfrac{1}{3}, -1\right), (-1,-1)$ となる.

$(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ のとき,

$$H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 16 > 0, \quad f_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 4 > 0$$

より, $(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ のとき極小で, 極小値は $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{44}{27}$ である.

$(x,y) = \left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$ のとき,

$$H\left(-1, \frac{1}{3}\right) = -16 < 0$$

より, $(x,y) = \left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$ のときは極値を持たない.

$(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, -1\right)$ のとき,

$$H\left(\frac{1}{3}, -1\right) = -16 < 0$$

より, $(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, -1\right)$ のときは極値を持たない.

$(x,y) = (-1,-1)$ のとき,

$$H(-1,-1) = 16 > 0, \quad f_{xx}(-1,-1) = -4 < 0$$

より, $(x,y) = (-1,-1)$ のとき極大で, 極大値は $f(-1,-1) = 4$ である.

(4) $f_x(x,y) = 2x - y - 2,\ f_y(x,y) = -x + 2y + 3,$
$f_{xx}(x,y) = 2,\ f_{xy}(x,y) = -1,\ f_{yy}(x,y) = 2$ である.
ここで, $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 3 > 0$ とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - y - 2 = 0 \\ f_y(x,y) = -x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

を解くと, $(x,y)=\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ を得る.

$$H\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)=3>0,\quad f_{xx}\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)=2>0$$

より, $(x,y)=\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ のとき極小で, 極小値は $f\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}$ である.

(5) $f_x(x,y)=3x^2-6y$, $f_y(x,y)=-6x+3y^2$,
$f_{xx}(x,y)=6x$, $f_{xy}(x,y)=-6$, $f_{yy}(x,y)=6y$ である.
ここで, $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=36(xy-1)$ とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-6y=0 & \cdots\cdots\text{(a)} \\ f_y(x,y)=-6x+3y^2=0 & \cdots\cdots\text{(b)} \end{cases}$$

を解こう. (a) 式より $y=\frac{1}{2}x^2$. これを (b) 式に代入すると, $x(x^3-8)=0$ を得る. よって $x=0,2$. $y=\frac{1}{2}x^2$ であるので, 連立方程式の解は $(x,y)=(0,0),(2,2)$ である.
$(x,y)=(0,0)$ のとき, $H(0,0)=-36<0$ より, 極値をとらない.
$(x,y)=(2,2)$ のとき,

$$H(2,2)=108>0,\quad f_{xx}(2,2)=12>0$$

より, $(x,y)=(2,2)$ のとき極小で, 極小値は $f(2,2)=-8$ である.

(6) $f_x(x,y)=3x^2y+y^3-y$, $f_y(x,y)=x^3+3xy^2-x$,
$f_{xx}(x,y)=6xy$, $f_{xy}(x,y)=3x^2+3y^2-1$, $f_{yy}(x,y)=6xy$ である.
ここで,

$$\begin{aligned} H(x,y)&=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2 \\ &=-9x^4-9y^4+18x^2y^2+6x^2+6y^2-1 \end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2y+y^3-y=0 & \cdots\cdots\text{(a)} \\ f_y(x,y)=x^3+3xy^2-x=0 & \cdots\cdots\text{(b)} \end{cases}$$

を解こう. (a) 式より $y(3x^2+y^2-1)=0$. よって, $y=0$ または $3x^2+y^2=1$ を得る. また, (b) 式より $x(x^2+3y^2-1)=0$. よって, $x=0$ または $x^2+3y^2=1$ を得る. これより, この連立方程式の解は, 次の 4 通りの場合が考えられる.
(a) $y=0$ かつ $x=0$
(b) $y=0$ かつ $x^2+3y^2=1$
(c) $x=0$ かつ $3x^2+y^2=1$
(d) $x^2+3y^2=1$ かつ $3x^2+y^2=1$

上記において, 最初の 3 番目までの場合から,

$$(x,y)=(0,0),(\pm1,0),(0,\pm1)$$

を得る. 次に, 4 番目の場合について調べよう. 最初に,

$$3x^2+y^2=x^2+3y^2$$

から $x^2=y^2$ を得る. これを $3x^2+y^2=1$ に代入すると, $4x^2=1$. よって, $x=\pm\dfrac{1}{2}$, $y=\pm\dfrac{1}{2}$ を得る. したがって, この連立方程式の解は,

$$(x,y)=(0,0),(\pm1,0),(0,\pm1),\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right),\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)\quad \text{(複号同順)}$$

となる.

$(x,y)=(0,0)$ のとき. $H(0,0)=-1<0$ となり, 極値をとらない.

$(x,y)=(\pm1,0),(0,\pm1)$ のとき. $H(\pm1,0)=H(0,\pm1)=-4<0$ となり, 極値をとらない.

$(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順) のとき.

$$H\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=2>0,\quad f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}>0$$

よって, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順) のとき極小で, 極小値は $f\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}$ である.

$(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},\mp\dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順) のとき.

$$H\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)=2>0,\quad f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}<0$$

よって, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},\mp\dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順) のとき極大で, 極大値は $f\left(\pm\dfrac{1}{2},\mp\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$ である.

(7) $f_x(x,y)=2xy-y^2-1$, $f_y(x,y)=x^2-2xy+1$,
$f_{xx}(x,y)=2y$, $f_{xy}(x,y)=2x-2y$, $f_{yy}(x,y)=-2x$ である.
ここで, $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=-4(x^2-xy+y^2)$ とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2xy-y^2-1=0 & \cdots\cdots\text{(a)} \\ f_y(x,y)=x^2-2xy+1=0 & \cdots\cdots\text{(b)} \end{cases}$$

を解こう. (a)+(b) より $x^2-y^2=0$. よって, $y=\pm x$ を得る. これを (a) 式に代入する. $y=x$ のとき, $x^2=1$ から $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ (複号同順) を得る. 一方, $y=-x$ のときは $-3x^2=1$ となり, 解は存在しない. よって, この連立方程式の解は $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ (複号同順) である. このとき, $H(\pm1,\pm1)=-4<0$ となる. ゆえに, $f(x,y)$ は極値を持たない.

(8) $f_x(x,y) = 2xy^2 - 2x,\ f_y(x,y) = 2x^2y - 2y,$
$f_{xx}(x,y) = 2y^2 - 2,\ f_{xy}(x,y) = 4xy,\ f_{yy}(x,y) = 2x^2 - 2$ である.
ここで, $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 4(x^2-1)(y^2-1) - 16x^2y^2$ とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy^2 - 2x = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{a}) \\ f_y(x,y) = 2x^2y - 2y = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{b}) \end{cases}$$

を解こう. (a) 式より, $2x(y^2-1) = 0$. よって, $x = 0$ または $y = \pm 1$ を得る. また, (b) 式より, $2y(x^2-1) = 0$. よって, $y = 0$ または $x = \pm 1$ を得る. よって, この連立方程式の解は, $(x,y) = (0,0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ （複号同順）である.

$(x,y) = (0,0)$ のとき.

$$H(0,0) = 4 > 0, \quad f_{xx}(0,0) = -2 < 0$$

よって, $(x,y) = (0,0)$ のとき極大で, 極大値は $f(0,0) = 1$ である.

$(x,y) = (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複号同順） のとき.

$$H(\pm 1, \pm 1) = H(\pm 1, \mp 1) = -16 < 0$$

となり極値をとらない.

3.17.

(1) $L(x,y,t) = f(x,y) - tg(x,y) = x + y - t(x^2 + y^2 - 1)$ とおく.
$g_x(x,y) = 2x,\ g_y(x,y) = 2y,$
$L_x(x,y,t) = 1 - 2tx,\ L_y(x,y,t) = 1 - 2ty,\ L_t(x,y,t) = -(x^2 + y^2 - 1),$
$L_{xx}(x,y,t) = -2t,\ L_{xy}(x,y,t) = 0,\ L_{yy}(x,y,t) = -2t$ である.
ここで,

$$\begin{aligned} H(x,y,t) &= L_{xx}(x,y,t)g_y(x,y)^2 - 2L_{xy}(x,y,t)g_x(x,y)g_y(x,y) \\ &\qquad + L_{yy}(x,y,t)g_x(x,y)^2 \\ &= -8t(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} L_x(x,y,t) = 1 - 2tx = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{a}) \\ L_y(x,y,t) = 1 - 2ty = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{b}) \\ L_t(x,y,t) = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{c}) \end{cases}$$

を解こう. (a), (b) 式より $x = y = \dfrac{1}{2t}$ を得る. これを (c) 式に代入すると, $2t^2 = 1$. よって $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る. $x = y = \dfrac{1}{2t}$ であったので, この連立方程式の解は, $(x,y,t) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) である. ここで,

$$H\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mp\frac{8}{\sqrt{2}} \quad (\text{複号同順})$$

よって, $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ という条件の下で極大で, 極大値は $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$ である.

また, $(x,y)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ という条件の下で極小で, 極小値は $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}$ である.

(2) $L(x,y,t)=f(x,y)-tg(x,y)=xy-t(x^2+y^2-1)$ とおく.
$g_x(x,y)=2x$, $g_y(x,y)=2y$,
$L_x(x,y,t)=y-2tx$, $L_y(x,y,t)=x-2ty$, $L_t(x,y,t)=-(x^2+y^2-1)$,
$L_{xx}(x,y,t)=-2t$, $L_{xy}(x,y,t)=1$, $L_{yy}(x,y,t)=-2t$ である.
ここで,

$$\begin{aligned}H(x,y,t)&=L_{xx}(x,y,t)g_y(x,y)^2-2L_{xy}(x,y,t)g_x(x,y)g_y(x,y)\\&\qquad\qquad+L_{yy}(x,y,t)g_x(x,y)^2\\&=-8(ty^2+xy+tx^2)\end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases}L_x(x,y,t)=y-2tx=0 & \cdots\cdots(\mathrm{a})\\ L_y(x,y,t)=x-2ty=0 & \cdots\cdots(\mathrm{b})\\ L_t(x,y,t)=-(x^2+y^2-1)=0 & \cdots\cdots(\mathrm{c})\end{cases}$$

を解こう. (a) 式より $y=2tx$. これを (b) 式に代入すると $x(1-4t^2)=0$. よって, $x=0$ または $t=\pm\dfrac{1}{2}$ を得る.

ところが, $x=0$ のとき $y=2tx$ から $y=0$ となり, これは (c) を満たさないので不適. よって $t=\pm\dfrac{1}{2}$ である.

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき. $y=2tx$ であったので, これより $y=x$ を得る. これを (c) 式に代入すると $2x^2=1$. よって $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) を得る.

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき. $y=2tx$ であったので, これより $y=-x$ を得る. これを (c) 式に代入すると $2x^2=1$. よって $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) を得る. よって, この連立方程式の解は

$$(x,y,t)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)\quad(\text{複号同順})$$

である.

$(x, y, t) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$ のとき.

$$H\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = -8 < 0$$

よって, $(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) のとき, $f(x, y)$ は $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ という条件の下で極大で, 極大値は $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$ である.

また, $(x, y, t) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順) のとき.

$$H\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = 8 > 0$$

よって, $(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) のとき, $f(x, y)$ は $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ という条件の下で極小で, 極小値は $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$ である.

(3) $g_x(x, y) = y$, $g_y(x, y) = x$ である.
$L(x, y, t) = f(x, y) - tg(x, y) = x^2 + y^2 - t(xy - 1)$ とおく.
$L_x(x, y, t) = 2x - ty$, $L_y(x, y, t) = 2y - tx$, $L_t(x, y, t) = -(xy - 1)$,
$L_{xx}(x, y, t) = 2$, $L_{xy}(x, y, t) = -t$, $L_{yy}(x, y, t) = 2$ である.
ここで,

$$\begin{aligned} H(x, y, t) &= L_{xx}(x, y, t)g_y(x, y)^2 - 2L_{xy}(x, y, t)g_x(x, y)g_y(x, y) \\ &\qquad + L_{yy}(x, y, t)g_x(x, y)^2 \\ &= 2x^2 + 2txy + 2y^2 \end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} L_x(x, y, t) = 2x - ty = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{a}) \\ L_y(x, y, t) = 2y - tx = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{b}) \\ L_t(x, y, t) = -(xy - 1) = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{c}) \end{cases}$$

を解こう. (a) 式より $x = \dfrac{t}{2}y$ を得る. これを (b) 式に代入すると, $y(4 - t^2) = 0$ となり, $y = 0$ または $t = \pm 2$ を得る. ところが, $y = 0$ は (c) 式を満たさないので不適. よって $t = \pm 2$ である.

$t = 2$ のとき, $x = \dfrac{t}{2}y$ から $x = y$ を得る. これを (c) 式に代入すると $y^2 = 1$ となり, $(x, y, t) = (\pm 1, \pm 1, 2)$ (複号同順) を得る.

$t = -2$ のとき, $x = \dfrac{t}{2}y$ から $x = -y$ を得る. これを (c) 式に代入すると $-y^2 = 1$ となり不適.

ここで, $H(\pm1,\pm1,2)=8>0$ より, $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ (複号同順) のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=xy-1=0$ という条件の下で極小で, 極小値は $f(\pm1,\pm1)=2$ である.

(4) $g_x(x,y)=2x$, $g_y(x,y)=2y$ である.
$L(x,y,t)=f(x,y)-tg(x,y)=4x^2+4xy+y^2-t(x^2+y^2-1)$ とおく.
$L_x(x,y,t)=8x+4y-2tx$, $L_y(x,y,t)=4x+2y-2ty$,
$L_t(x,y,t)=-(x^2+y^2-1)$,
$L_{xx}(x,y,t)=8-2t$, $L_{xy}(x,y,t)=4$, $L_{yy}(x,y,t)=2-2t$ である.
ここで,

$$\begin{aligned}H(x,y,t)&=L_{xx}(x,y,t)g_y(x,y)^2-2L_{xy}(x,y,t)g_x(x,y)g_y(x,y)\\&\qquad+L_{yy}(x,y,t)g_x(x,y)^2\\&=8\{(4-t)y^2-4xy+(1-t)x^2\}\end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases}L_x(x,y,t)=8x+4y-2tx=0 & \cdots\cdots(\mathrm{a})\\L_y(x,y,t)=4x+2y-2ty=0 & \cdots\cdots(\mathrm{b})\\L_t(x,y,t)=-(x^2+y^2-1)=0 & \cdots\cdots(\mathrm{c})\end{cases}$$

を解こう. (a) 式より $y=-\dfrac{1}{2}(4-t)x$ を得る. これを (b) 式に代入すると, $xt(t-5)=0$ となり, $x=0$ または $t=0,5$ を得る. ところが, $x=0$ とのき, $y=-\dfrac{1}{2}(4-t)x$ から $y=0$ を得るが, これは (c) 式を満たさないので不適. よって $t=0,5$ である.
$t=0$ のとき, $y=-\dfrac{1}{2}(4-t)x$ から $y=-2x$ を得る. これを (c) 式に代入すると $5x^2=1$ となり, $(x,y,t)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt5},\mp\dfrac{2}{\sqrt5},0\right)$ (複号同順) を得る.
$t=5$ のとき, $y=-\dfrac{1}{2}(4-t)x$ から $y=\dfrac{1}{2}x$ を得る. これを (c) 式に代入すると $\dfrac{5}{4}x^2=1$ となり, $(x,y,t)=\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt5},\pm\dfrac{1}{\sqrt5},5\right)$ (複号同順) を得る.
ここで, $H\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt5},\mp\dfrac{2}{\sqrt5},0\right)=40>0$ より, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt5},\mp\dfrac{2}{\sqrt5}\right)$ (複号同順) のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ という条件の下で極小で, 極小値は $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt5},\mp\dfrac{2}{\sqrt5}\right)=0$ である.
また, $H\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt5},\pm\dfrac{1}{\sqrt5},5\right)=-40<0$ より, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt5},\pm\dfrac{1}{\sqrt5}\right)$ (複号同順) のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ という条件の下で極大で, 極大値は $f\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt5},\pm\dfrac{1}{\sqrt5}\right)=5$ である.

(5) $g_x(x,y)=2x+y$, $g_y(x,y)=x+2y$ である.
$L(x,y,t)=f(x,y)-tg(x,y)=xy-t(x^2+xy+y^2-1)$ とおく.
$L_x(x,y,t)=y-2tx-ty$, $L_y(x,y,t)=x-tx-2ty$,
$L_t(x,y,t)=-(x^2+xy+y^2-1)$,
$L_{xx}(x,y,t)=-2t$, $L_{xy}(x,y,t)=1-t$, $L_{yy}(x,y,t)=-2t$ である.
ここで,

$$\begin{aligned}H(x,y,t)&=L_{xx}(x,y,t)g_y(x,y)^2-2L_{xy}(x,y,t)g_x(x,y)g_y(x,y)\\&\qquad\qquad+L_{yy}(x,y,t)g_x(x,y)^2\\&=-2t(x+2y)^2-2(1-t)(2x+y)(x+2y)-2t(2x+y)^2\end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases}L_x(x,y,t)=y-2tx-ty=0 & \cdots\cdots\text{(a)}\\ L_y(x,y,t)=x-tx-2ty=0 & \cdots\cdots\text{(b)}\\ L_t(x,y,t)=-(x^2+xy+y^2-1)=0 & \cdots\cdots\text{(c)}\end{cases}$$

を解こう. 最初に, $t=0$ ならば, (a), (b) 式から $x=y=0$ となり, (c) 式を満たさないので $t\neq 0$ である. (a) 式より $x=\dfrac{1-t}{2t}y$ を得る. これを (b) 式に代入すると, $y(t+1)(3t-1)=0$ となり, $y=0$ または $t=-1,\dfrac{1}{3}$ を得る. ところが, $y=0$ とのき, $x=\dfrac{1-t}{2t}y$ から $x=0$ を得るが, これは (c) 式を満たさないので不適. よって $t=-1,\dfrac{1}{3}$ である.
$t=-1$ のとき, $x=\dfrac{1-t}{2t}y$ から $x=-y$ を得る. これを (c) 式に代入すると $y^2=1$ となり, $(x,y,t)=(\pm1,\mp1,-1)$ (複号同順) を得る.
$t=\dfrac{1}{3}$ のとき, $x=\dfrac{1-t}{2t}y$ から $x=y$ を得る. これを (c) 式に代入すると $3y^2=1$ となり, $(x,y,t)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{3}\right)$ (複号同順) を得る.
ここで, $H(\pm1,\mp1,-1)=8>0$ より, $(x,y)=(\pm1,\mp1)$ (複号同順) のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+xy+y^2-1=0$ という条件の下で極小で, 極小値は $f(\pm1,\mp1)=-1$ である.
また, $H\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{3}\right)=-8<0$ より, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (複号同順) のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+xy+y^2-1=0$ という条件の下で極大で, 極大値は $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{3}$ である.

3.18.

(1) $f_x(x,y)=e^{x-y}$, $f_y(x,y)=-e^{x-y}$,
$f_{xx}(x,y)=e^{x-y}$, $f_{xy}(x,y)=-e^{x-y}$, $f_{yy}(x,y)=e^{x-y}$,
$f_{xxx}(x,y)=e^{x-y}$, $f_{xxy}(x,y)=-e^{x-y}$, $f_{xyy}(x,y)=e^{x-y}$, $f_{yyy}(x,y)=-e^{x-y}$

である．よって，$f(x,y)=e^{x-y}$ の $(x,y)=(1,1)$ における 3 次までのテイラー展開は，

$$
\begin{aligned}
&f(1,1)+\{f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)\}\\
&\qquad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right\}\\
&\qquad\quad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(1,1)(x-1)^3+3f_{xxy}(1,1)(x-1)^2(y-1)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(1,1)(x-1)(y-1)^2+f_{yyy}(1,1)(y-1)^3\right\}\\
&=1+\{(x-1)-(y-1)\}+\frac{1}{2}\left\{(x-1)^2-2(x-1)(y-1)+(y-1)^2\right\}\\
&\qquad\quad\frac{1}{6}\left\{(x-1)^3-3(x-1)^2(y-1)+3(x-1)(y-1)^2-(y-1)^3\right\}
\end{aligned}
$$

なお，最後の結果は展開して整理をしない（以下，(4)，(5) 以外の問題も同様）．

(2) $f_x(x,y)=2\cos(2x-y)$, $f_y(x,y)=-\cos(2x-y)$, $f_{xx}(x,y)=-4\sin(2x-y)$, $f_{xy}(x,y)=2\sin(2x-y)$, $f_{yy}(x,y)=-\sin(2x-y)$, $f_{xxx}(x,y)=-8\cos(2x-y)$, $f_{xxy}(x,y)=4\cos(2x-y)$, $f_{xyy}(x,y)=-2\cos(2x-y)$, $f_{yyy}(x,y)=\cos(2x-y)$ である．よって，$f(x,y)=\sin(2x-y)$ の $(x,y)=(1,2)$ における 3 次までのテイラー展開は，

$$
\begin{aligned}
&f(1,2)+\{f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)\}\\
&\qquad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(1,2)(x-1)^2+2f_{xy}(1,2)(x-1)(y-2)+f_{yy}(1,2)(y-2)^2\right\}\\
&\qquad\quad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(1,2)(x-1)^3+3f_{xxy}(1,2)(x-1)^2(y-2)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(1,2)(x-1)(y-2)^2+f_{yyy}(1,2)(y-2)^3\right\}\\
&=\{2(x-1)-(y-2)\}\\
&\qquad-\frac{1}{6}\left\{8(x-1)^3-12(x-1)^2(y-2)+6(x-1)(y-2)^2-(y-2)^3\right\}
\end{aligned}
$$

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}=(x-y)^{-1}$ より，
$f_x(x,y)=-(x-y)^{-2}$, $f_y(x,y)=(x-y)^{-2}$,
$f_{xx}(x,y)=2(x-y)^{-3}$, $f_{xy}(x,y)=-2(x-y)^{-3}$, $f_{yy}(x,y)=2(x-y)^{-3}$,
$f_{xxx}(x,y)=-6(x-y)^{-4}$, $f_{xxy}(x,y)=6(x-y)^{-4}$, $f_{xyy}(x,y)=-6(x-y)^{-4}$,
$f_{yyy}(x,y)=6(x-y)^{-4}$ である．よって，$f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ の $(x,y)=(1,0)$ に

おける 3 次までのテイラー展開は,

$$\begin{aligned}
&f(1,0)+\{f_x(1,0)(x-1)+f_y(1,0)y\}\\
&\quad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(1,0)(x-1)^2+2f_{xy}(1,0)(x-1)y+f_{yy}(1,0)y^2\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(1,0)(x-1)^3+3f_{xxy}(1,0)(x-1)^2y\right.\\
&\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(1,0)(x-1)y^2+f_{yyy}(1,0)y^3\right\}\\
&=1-\{(x-1)-y\}+\{(x-1)^2-2(x-1)y+y^2\}\\
&\qquad\qquad-\left\{(x-1)^3-3(x-1)^2y+3(x-1)y^2-y^3\right\}
\end{aligned}$$

(4) $f_x(x,y)=e^x\log(1+y)$, $f_y(x,y)=e^x(1+y)^{-1}$, $f_{xx}(x,y)=e^x\log(1+y)$, $f_{xy}(x,y)=e^x(1+y)^{-1}$, $f_{yy}(x,y)=-e^x(1+y)^{-2}$, $f_{xxx}(x,y)=e^x\log(1+y)$, $f_{xxy}(x,y)=e^x(1+y)^{-1}$, $f_{xyy}(x,y)=-e^x(1+y)^{-2}$, $f_{yyy}(x,y)=2e^x(1+y)^{-3}$ である．よって, $f(x,y)=e^x\log(1+y)$ の $(x,y)=(0,0)$ における 3 次までのテイラー展開は,

$$\begin{aligned}
&f(0,0)+\{f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\}\\
&\quad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(0,0)x^3+3f_{xxy}(0,0)x^2y\right.\\
&\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(0,0)xy^2+f_{yyy}(0,0)y^3\right\}\\
&=y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)+\frac{1}{6}(3x^2y-3xy^2+2y^3)
\end{aligned}$$

e^x と $\log(1+y)$ のマクローリン展開を別々に求めて, それらを掛け合わせて 3 次の項まで展開しても良い.

(5) $f_x(x,y)=-e^y\sin x$, $f_y(x,y)=e^y\cos x$, $f_{xx}(x,y)=-e^y\cos x$, $f_{xy}(x,y)=-e^y\sin x$, $f_{yy}(x,y)=e^y\cos x$, $f_{xxx}(x,y)=e^y\sin x$, $f_{xxy}(x,y)=-e^y\cos x$, $f_{xyy}(x,y)=-e^y\sin x$, $f_{yyy}(x,y)=e^y\cos x$ である．よって, $f(x,y)=e^y\cos x$ の $(x,y)=(0,0)$ における 3 次までのテイラー展開は,

$$\begin{aligned}
&f(0,0)+\{f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\}\\
&\quad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(0,0)x^3+3f_{xxy}(0,0)x^2y\right.\\
&\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(0,0)xy^2+f_{yyy}(0,0)y^3\right\}\\
&=1+y-\frac{1}{2}(x^2-y^2)-\frac{1}{6}(3x^2y-y^3)
\end{aligned}$$

$\cos x$ と e^y のマクローリン展開を別々に求めて, それらを掛け合わせて 3 次の項まで展開しても良い.

(6) $f(x,y)=\sqrt{x+2y}=(x+2y)^{\frac{1}{2}}$ より,
$f_x(x,y)=\dfrac{1}{2}(x+2y)^{-\frac{1}{2}}$, $f_y(x,y)=(x+2y)^{-\frac{1}{2}}$,
$f_{xx}(x,y)=-\dfrac{1}{4}(x+2y)^{-\frac{3}{2}}$, $f_{xy}(x,y)=-\dfrac{1}{2}(x+2y)^{-\frac{3}{2}}$,
$f_{yy}(x,y)=-(x+2y)^{-\frac{3}{2}}$,
$f_{xxx}(x,y)=\dfrac{3}{8}(x+2y)^{-\frac{5}{2}}$, $f_{xxy}(x,y)=\dfrac{3}{4}(x+2y)^{-\frac{5}{2}}$,
$f_{xyy}(x,y)=\dfrac{3}{2}(x+2y)^{-\frac{5}{2}}$, $f_{yyy}(x,y)=3(x+2y)^{-\frac{5}{2}}$ である. よって, $f(x,y)=\sqrt{x+2y}$ の $(x,y)=(3,-1)$ における 3 次までのテイラー展開は,

$$
\begin{aligned}
&f(3,-1)+\{f_x(3,-1)(x-3)+f_y(3,-1)(y+1)\}\\
&\quad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(3,-1)(x-3)^2+2f_{xy}(3,-1)(x-3)(y+1)+f_{yy}(3,-1)(y+1)^2\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(3,-1)(x-3)^3+3f_{xxy}(3,-1)(x-3)^2(y+1)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(3,-1)(x-3)(y+1)^2+f_{yyy}(3,-1)(y+1)^3\right\}\\
&=1+\frac{1}{2}\{(x-3)+2(y+1)\}-\frac{1}{8}\{(x-3)^2+4(x-3)(y+1)+4(y+1)^2\}\\
&\qquad+\frac{1}{48}\{3(x-3)^3+18(x-3)^2(y+1)+36(x-3)(y+1)^2+24(y+1)^3\}\\
&=1+\frac{1}{2}\{(x-3)+2(y+1)\}-\frac{1}{8}\{(x-3)^2+4(x-3)(y+1)+4(y+1)^2\}\\
&\qquad+\frac{1}{16}\{(x-3)^3+6(x-3)^2(y+1)+12(x-3)(y+1)^2+8(y+1)^3\}
\end{aligned}
$$

例題と演習で学ぶ　微分積分学　演習問題解答
(第 6 刷にも対応)

第 4 章

4.1.

(1) $D = [0,1] \times [1,2]$ より,

$$\begin{aligned}\int_D (2x-y)dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_1^2 (2x-y)dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left[2xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(2x - \frac{3}{2} \right) dx = \left[x^2 - \frac{3}{2}x \right]_0^1 = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) $D = [1,2] \times [2,3]$ より,

$$\begin{aligned}\int_D (x^2y+y^2)dxdy &= \int_1^2 \left\{ \int_2^3 (x^2y+y^2)dy \right\} dx \\ &= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_2^3 dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{3} \right) dx = \left[\frac{5}{6}x^3 + \frac{19}{3}x \right]_1^2 = \frac{73}{6}\end{aligned}$$

(3) $D = [0,1] \times [-1,2]$ より,

$$\begin{aligned}\int_D (x^2+2xy+y)dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_{-1}^2 (x^2+2xy+y)dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2y + xy^2 + \frac{1}{2}y^2 \right]_{-1}^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(3x^2 + 3x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \right]_0^1 = 4\end{aligned}$$

(4) $D = [0,1] \times [0,2]$ より,

$$\begin{aligned}\int_D xy(x-y)dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^2 (x^2y-xy^2)dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^3 \right]_0^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^2 - \frac{8}{3}x \right) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 \right]_0^1 = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(5) $D = [0,1] \times [0,3]$ より,

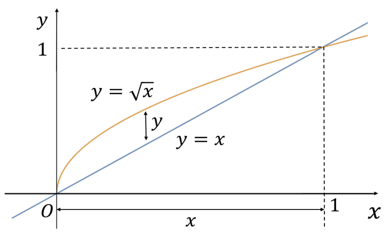
$$\int_D e^{2x+3y}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^3 e^{2x+3y}dy\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}e^{2x+3y}\right]_0^3 dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(e^{2x+9} - e^{2x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}e^{2x+9} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{6}(e^{11} - e^9 - e^2 + 1)$$

4.2.

(1) $D = \left\{(x,y); 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2},\ x^2 \leqq y \leqq \frac{x}{2}\right\}$ より,

$$\int_D xdxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x^2}^{\frac{x}{2}} xdy\right)dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} [xy]_{x^2}^{\frac{x}{2}}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}x^2 - x^3\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{192}$$

(2) 領域 D は図示すると次の曲線と直線の間の部分である.



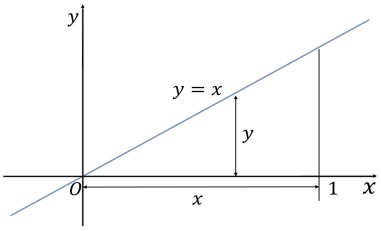
これより領域 D は

$$D = \{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq 1, x \leqq y \leqq \sqrt{x}\}$$

と書くことができる．よって，

$$\int_D y dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_x^{\sqrt{x}} y dy \right\} dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_x^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

(3) 領域 D は図示すると次の直線の下側である．



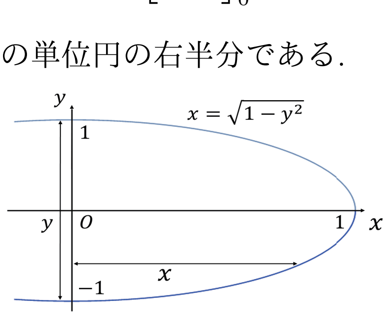
これより領域 D は

$$D = \{(x, y);\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\}$$

と書くことができる．よって，

$$\int_D xy^2 dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^x xy^2 dy \right\} dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_0^x dx$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx$$
$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

(4) 領域 D は図示すると次の単位円の右半分である．



これより領域 D は

$$D = \{(x, y);\ -1 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq x \leqq \sqrt{1 - y^2}\}$$

と書くことができる．よって，

$$\begin{aligned}\int_D xdxdy &= \int_{-1}^{1}\left\{\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xdx\right\}dy\\ &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-y^2)dy\\ &= \frac{1}{2}\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\int_D \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dxdy &= \int_0^1\left\{\int_0^x \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dy\right\}dx\\ &= \int_0^1\left[\frac{y^2}{2\sqrt{1+x^3}}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx\end{aligned}$$

ここで，$\sqrt{1+x^3}=t$ とおく．$\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx = dt$，

x	$0 \to 1$
t	$1 \to \sqrt{2}$

．よって，

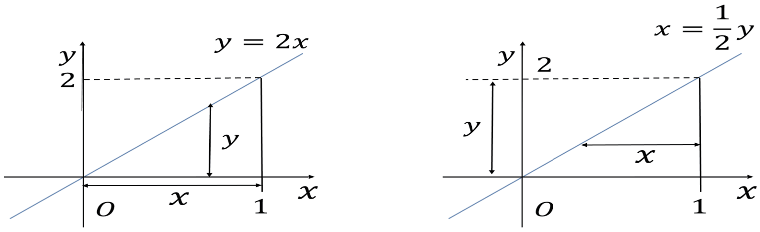
$$\text{与式} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{3}dt = \left[\frac{1}{3}t\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$$

4.3. $f(x)g(y)$ を y で定積分するとき，$f(x)$ は定数扱いとなる．ここで，$I=\displaystyle\int_c^d g(y)dy$ とおく (I は数である)．このとき，

$$\begin{aligned}\int_D f(x)g(y)dxdy &= \int_a^b\left\{\int_c^d f(x)g(y)dy\right\}dx\\ &= \int_a^b\left\{f(x)\int_c^d g(y)dy\right\}dx\\ &= \int_a^b f(x)\times Idx\\ &= \int_a^b f(x)dx\times I = \int_a^b f(x)dx\times\int_c^d g(y)dy\end{aligned}$$

4.4.

(1) この重積分の積分領域は次の左図であるが，これは右図のように見ることもできる．



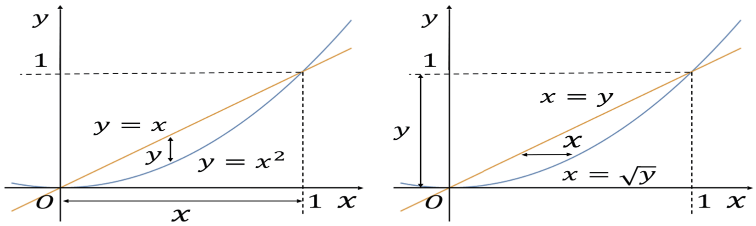
これより, D は

$$D=\{(x,y);\ 0\leqq y\leqq 2, \frac{1}{2}y\leqq x\leqq 1\}$$

と書くことができる. よって,

$$\int_0^1\left(\int_0^{2x}f(x,y)dy\right)dx=\int_0^2\left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 f(x,y)dx\right)dy$$

(2) この重積分の積分領域は次の左図であるが, これは右図のように見ることもできる.



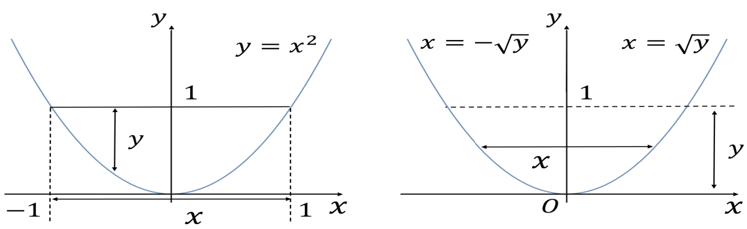
これより, D は

$$D=\{(x,y);\ 0\leqq y\leqq 1, y\leqq x\leqq \sqrt{y}\}$$

と書くことができる. よって,

$$\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\right)dy$$

(3) この重積分の積分領域は次の左図であるが, これは右図のように見ることもできる.



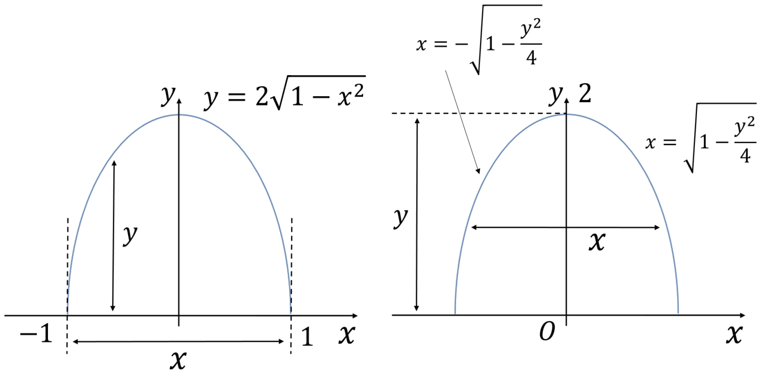
これより, D は

$$D=\{(x,y);\ 0\leqq y\leqq 1, -\sqrt{y}\leqq x\leqq \sqrt{y}\}$$

と書くことができる. よって,

$$\int_{-1}^1\left(\int_{x^2}^{1}f(x,y)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\right)dy$$

(4) この重積分の積分領域は次の左図であるが，これは右図のように見ることもできる．



これより，D は

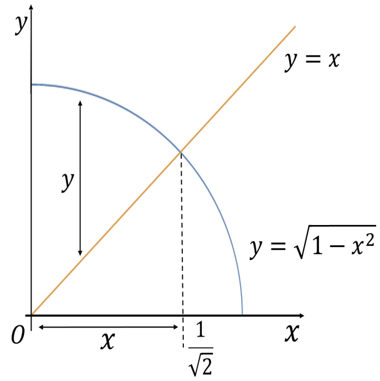
$$D = \{(x,y);\ 0 \leqq y \leqq 2, -\sqrt{1-\frac{y^2}{4}} \leqq x \leqq \sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\}$$

と書くことができる．よって，

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right)dx = \int_{0}^{2}\left(\int_{-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} f(x,y)dx\right)dy$$

4.5.

(1) この重積分の積分領域は次の扇形と直線ではさまれる上側の部分である．



これより，D は

$$D = \{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}, x \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$$

と書くことができる．よって，

$$\begin{aligned}\int_D dxdy &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_x^{\sqrt{1-x^2}} dy\right)dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} [y]_x^{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx\end{aligned}$$

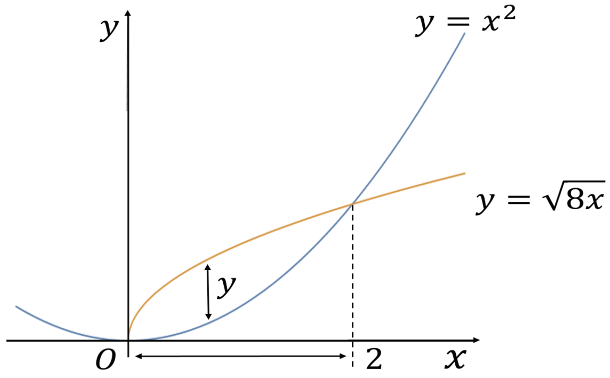
ここで, $x = \sin t$ とおくと, $dx = \cos t dt$,

x	$0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$
t	$0 \to \frac{\pi}{4}$

. よって,

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t - \sin t) \cos t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 t - \sin t \cos t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} - \frac{1}{2} \sin 2t \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

(2) 領域 D は次の 2 曲線で囲まれる部分である.



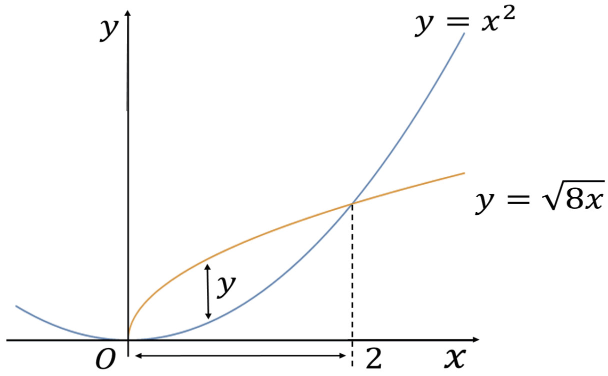
これより, D は

$$D = \{(x, y);\ 0 \leqq x \leqq 2, x^2 \leqq y \leqq 2\sqrt{2x}\}$$

と書くことができる. よって,

$$
\begin{aligned}
\int_D dxdy &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2\sqrt{2x}} dy \right) dx \\
&= \int_0^2 [y]_{x^2}^{2\sqrt{2x}} dx \\
&= \int_0^2 \left(2\sqrt{2} x^{\frac{1}{2}} - x^2 \right) dx \\
&= \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

(3) 領域 D は次の 2 曲線で囲まれる部分である.



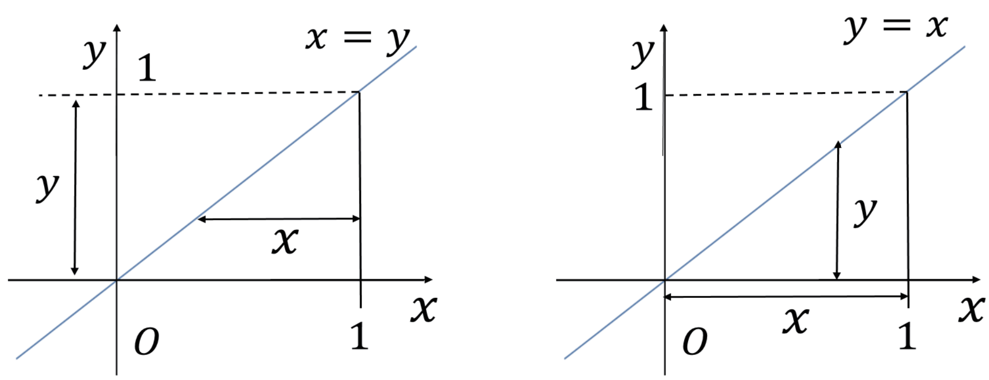
これより, D は

$$D=\{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq 2, x^2 \leqq y \leqq 2\sqrt{2x}\}$$

と書くことができる. よって,

$$\begin{aligned}\int_D ydxdy &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2\sqrt{2x}} ydy\right)dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{2\sqrt{2x}} dx \\ &= \int_0^2 \left(4x-\frac{1}{2}x^4\right)dx \\ &= \left[2x^2-\frac{1}{10}x^5\right]_0^2 = \frac{24}{5}\end{aligned}$$

(4) 領域 D は次の左図の直線の下側であるが, これは右図のように見ることもできる.



これより, D は

$$D=\{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\}$$

と書くことができる．よって，

$$\int_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left[ye^{x^2} \right]_0^x dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx$$

ここで，$x^2 = t$ とおくと，$2xdx = dt$，

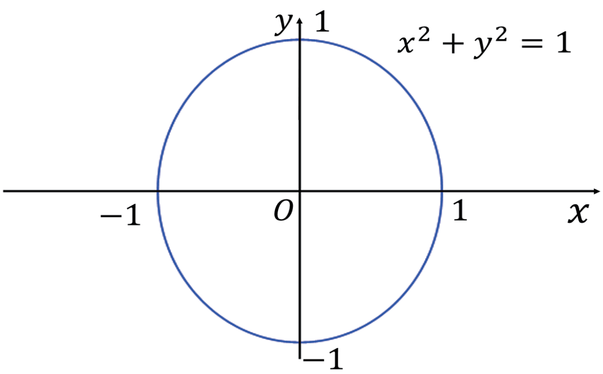
x	$0 \to 1$
t	$0 \to 1$

．よって，

$$与式 = \int_0^1 \frac{1}{2}e^t dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

4.6.

(1) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．D は次の図の単位円の内側であることから，$0 \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ である．



また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

より，

$$E = \{(r,\theta);\ 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta < 2\pi\}$$

とおけば，

$$\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_E \sqrt{1-r^2}|r|drd\theta$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r\sqrt{1-r^2}d\theta \right) dr$$
$$= \int_0^1 \left[r\sqrt{1-r^2}\theta \right]_0^{2\pi} dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr$$

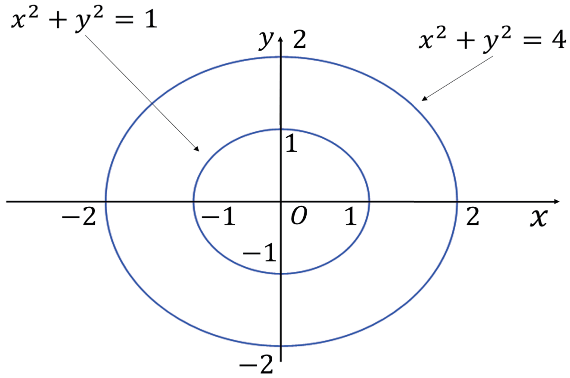
ここで, $1-r^2=t$ とおくと, $-2rdr=dt$,

r	$0\to 1$
t	$1\to 0$

. よって,

$$与式 = -\pi\int_1^0 \sqrt{t}dt = \pi\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt = \pi\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi$$

(2) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. D は次の円にはさまれた部分であることから, $1 \leqq r \leqq 2$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ である.



また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

より,

$$E = \{(r,\theta);\ 1 \leqq r \leqq 2, 0 \leqq \theta < 2\pi\}$$

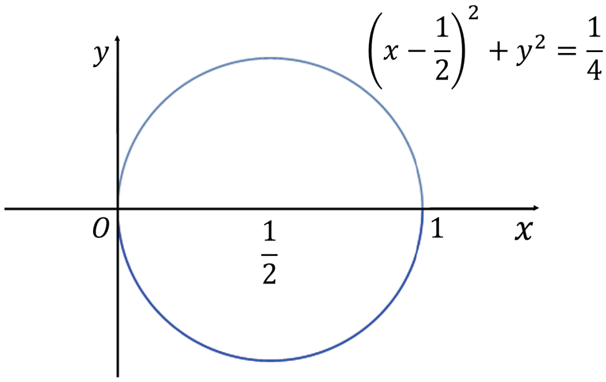
とおけば,

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^6}dxdy &= \int_E \frac{1}{r^{12}}|r|drd\theta \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} r^{-11}d\theta\right)dr \\
&= \int_1^2 \left[r^{-11}\theta\right]_0^{2\pi} dr \\
&= 2\pi\int_1^2 r^{-11}dr \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{10}r^{-10}\right]_1^2 = \frac{1023}{5120}\pi
\end{aligned}$$

(3) 最初に,

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 \leqq x &\iff x^2-x+y^2 \leqq 0 \\
&\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

より, 領域 D は次の円の内部になる.



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $x^2+y^2 \leqq x$ より, $0 \leqq r^2 \leqq r\cos\theta$, すなわち, $0 \leqq r \leqq \cos\theta$. また, 図より $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int_D x dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} r\cos\theta |r| dr \right) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 \cos\theta \right]_0^{\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\
&= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

なお, 最後の定積分の計算は, 例題 2.16 の結果を用いた.

4.7.

(1) $\begin{cases} x+y=u \\ y-x=v \end{cases}$ とおく．このとき，$0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$ である．また，$\begin{cases} x=\frac{u-v}{2} \\ y=\frac{u+v}{2} \end{cases}$ より，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

よって，

$$\begin{aligned} \int_D y\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{u+v}{2} \cdot \frac{1}{2} dv \right) du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left[uv + \frac{1}{2}v^2 \right]_0^1 du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(u + \frac{1}{2} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u \right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ とおく．このとき，$0 \leqq u \leqq 2$, $0 \leqq v \leqq 2$ である．また，$\begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}$ より，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

よって，

$$\begin{aligned} \int_D (x-y)e^{x+y}dxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^2 ve^u \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| dv \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\frac{1}{2}v^2 e^u \right]_0^2 du \\ &= \int_0^2 e^u du \\ &= [e^u]_0^2 = e^2 - 1 \end{aligned}$$

(3) $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく．このとき，$x,y \geqq 0$ より $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $1 \leqq x+y \leqq 3$ より，$\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta} \leqq r \leqq \frac{3}{\cos\theta+\sin\theta}$ である．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{3}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{r^2}{r^3(\cos\theta+\sin\theta)^3}|r|dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{3}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r}{(\cos\theta+\sin\theta)^3} \right]_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{3}{\cos\theta+\sin\theta}} d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{[\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})]^4}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4(\theta+\frac{\pi}{4})}d\theta
\end{aligned}$$

ここで, $t=\theta+\dfrac{\pi}{4}$ とおくと, $d\theta=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline \theta & 0 \to \dfrac{\pi}{2} \\ \hline t & \dfrac{\pi}{4} \to \dfrac{3}{4}\pi \\ \hline \end{array}$ より,

$$与式 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sin^4 t}dt$$

さらに, $s=\tan\dfrac{t}{2}$ とおくと, $\sin t=\dfrac{2s}{1+s^2}$, $dt=\dfrac{2}{1+s^2}ds$, $\begin{array}{|c|c|}\hline t & \dfrac{\pi}{4} \to \dfrac{3}{4}\pi \\ \hline s & \tan\dfrac{\pi}{8} \to \tan\dfrac{3}{8}\pi \\ \hline \end{array}$.

ここで,

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{8} &= \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}-1 \\
\tan\frac{3}{8}\pi &= \frac{\cos\frac{3}{8}\pi}{\sin\frac{3}{8}\pi} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{1+\cos\frac{3}{4}\pi}} = \sqrt{2}+1
\end{aligned}$$

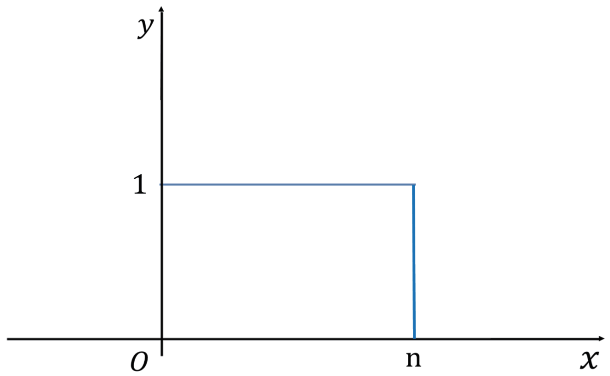
から, $\begin{array}{|c|c|}\hline t & \dfrac{\pi}{4} \to \dfrac{3}{4}\pi \\ \hline s & \sqrt{2}-1 \to \sqrt{2}+1 \\ \hline \end{array}$. よって,

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{(1+s^2)^4}{16s^4} \cdot \frac{2}{1+s^2} ds \\
&= \frac{1}{16}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{(s^2+1)^3}{s^4} ds \\
&= \frac{1}{16}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \left(s^2+3+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s^4}\right) ds \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}s^3+3s-\frac{3}{s}-\frac{1}{3s^3}\right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

なお, 最後の行の代入後の計算は, 分母の有理化をすることによって整理することが出来る.

4.8.

(1) $D_n = \{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq n, 0 \leqq y \leqq 1\}$ とする. $\{D_n\}$ は D の単調近似列である. また, 領域 D_n は次の長方形の内部となっている.

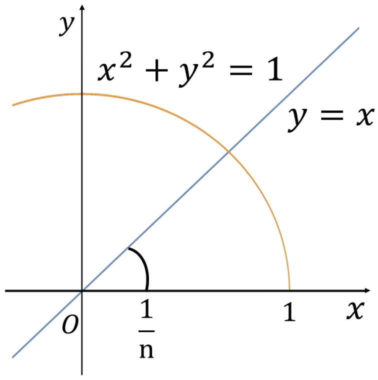


$$\begin{aligned}
\int_{D_n} e^{-(x+y)} dxdy &= \int_0^n e^{-x} dx \int_0^1 e^{-y} dy \\
&= \left[-e^{-x}\right]_0^{-n} \left[-e^{-y}\right]_0^1 = \left(1-\frac{1}{e}\right)\left(1-\frac{1}{e^n}\right)
\end{aligned}$$

ここで, 最初の等号は演習問題 4.3 の結果を利用した. また, D 内で $e^{-(x+y)} \geqq 0$ より,

$$\begin{aligned}
\int_D e^{-(x+y)} dxdy &= \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} e^{-(x+y)} dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{e}\right)\left(1-\frac{1}{e^n}\right) = 1-\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

(2) $D_n = \left\{(x,y);\ 0 \leqq y \leqq x, \dfrac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする．$\{D_n\}$ は　D の単調近似列である．また，領域 D_n は次の扇形ではさまれた部分となっている．



ここで，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．このとき，$0 \leqq y \leqq x$ より $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1$ より，$\dfrac{1}{n} \leqq r \leqq 1$ である．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_{D_n} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{r\cos\theta}{r} \cdot |r|dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta \cdot \int_{\frac{1}{n}}^1 rdr \\ &= [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right)\end{aligned}$$

ここで，2 番目の等号は演習問題 4.3 の結果を利用した．また，D 内で $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqq 0$ より，

$$\begin{aligned}\int_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

4.9.

(1) $\dfrac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(0.5)} = \dfrac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \dfrac{3}{4}$

(2) $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$

なお, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ は, 例題 4.10 の結果を利用した.

(3) $x^2=t$ とおくと, $x=\sqrt{t}$, $dx=\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to\infty \\ \hline t & 0\to\infty \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx&=\frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-t}dt\\&=\frac{1}{2}\Gamma(2)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\Gamma(1)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(4) $\log x=t$ とおくと, $x=e^t$, $dx=e^tdt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 1\to\infty \\ \hline t & 0\to\infty \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^2\sqrt{\log x}}dx=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

4.10.

(1) 領域 D において $xy\geqq 0$ なので, 求める体積は $\displaystyle\int_D xydxdy$ である. ここで, $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ とおく. このとき, $x,y\geqq 0$ より $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$, $0\leqq x^2+y^2\leqq 1$ より, $0\leqq r\leqq 1$ である. また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int_D xydxdy&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta\cdot|r|dr\right)d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\cdot\int_0^1 r^3dr\\&=\frac{1}{4}\left[-\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

ここで, 2 番目の等号は演習問題 4.3 の結果を利用した.

(2) $x+z=1 \iff z=-x+1$ である. 領域 D 内では $-1\leqq x\leqq 1$ より, $z=-x+1\geqq 0$ である. よって, 求める体積は $\displaystyle\int_D(-x+1)dxdy$ となる. ここで, $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ とおく. このとき, $0\leqq\theta\leqq 2\pi$, $0\leqq x^2+y^2\leqq 1$ より,

$0 \leqq r \leqq 1$ である．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって，

$$\begin{aligned}
\int_D (-x+1)dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} (-r\cos\theta + 1)|r|d\theta \right\} dr \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} (-r^2\cos\theta + r)d\theta \right\} dr \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}r^3\cos\theta + \frac{1}{2}r^2 \right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\theta \right) d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3}\sin\theta \right]_0^{2\pi} = \pi
\end{aligned}$$

(3) （第５刷までの解答）$D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ とする．$x^2+y^2+z^2 = 1 \iff z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ である．求める体積は上半分の体積を２倍すればよい，すなわち，$2\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ である．ここで，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．このとき，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq x^2+y^2 \leqq 1$ より，$0 \leqq r \leqq 1$ である．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって，

$$\begin{aligned}
2\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy &= 2\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2} \cdot |r|d\theta \right) dr \\
&= 2\int_0^1 \left[r\sqrt{1-r^2}\theta \right]_0^{2\pi} dr = 4\pi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr
\end{aligned}$$

ここで，$1-r^2 = t$ とおく．$-2rdr = dt$,

r	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

．よって，

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= 4\pi \int_1^0 t^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) dt \\
&= 2\pi \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt \\
&= 2\pi \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

(3) （第 6 刷の解答) $D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leqq 1/4\}$ とする．$x^2+y^2+z^2=1 \iff z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ である．求める体積は上半分の体積を 2 倍すればよい，すなわち，$2\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ である．ここで，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．このとき，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq x^2+y^2 \leqq 1/4$ より，$0 \leqq r \leqq 1/2$ である．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって，

$$\begin{aligned} 2\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy &= 2\int_0^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{1-r^2}\cdot|r|d\theta\right)dr \\ &= 2\int_0^{1/2}\left[r\sqrt{1-r^2}\theta\right]_0^{2\pi}dr = 4\pi\int_0^{1/2} r\sqrt{1-r^2}dr \end{aligned}$$

ここで，$1-r^2=t$ とおく．$-2rdr=dt$,

r	$0 \to 1/2$
t	$1 \to 3/4$

. よって，

$$\begin{aligned} 与式 &= 4\pi\int_1^{3/4} t^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)dt \\ &= 2\pi\int_{3/4}^1 t^{\frac{1}{2}}dt \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{3/4}^1 = \frac{\pi}{6}(8-3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

(4) 平面 $z=1$ と曲面 $z=x^2+y^2$ の交線は，$x^2+y^2=1$ である．よって，この曲線の内側の部分における体積を求めればよい．

$$D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leqq 1\}$$

とおくと，領域 D 内では，$1 \geqq x^2+y^2$ より，求める体積は，

$$\int_D (1-x^2-y^2)dxdy$$

である．ここで，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．このとき，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq x^2+y^2 \leqq 1$ より，$0 \leqq r \leqq 1$ である．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int_D(1-x^2-y^2)dxdy &= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(1-r^2)|r|d\theta\right)dr\\ &= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(r-r^3)d\theta\right)dr\\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1(r-r^3)dr\\ &= [\theta]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1=\frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

ここで, 最後から 3 番目の等号は, 演習問題 4.3 の結果を利用した.

(5) 曲面 $z=x^2+y^2$ と平面 $z=2x$ の交線は

$$x^2+y^2=2x \iff (x-1)^2+y^2=1$$

である. よって, この曲線の内側の部分の体積を求めればよい.

$$D=\{(x,y);\ (x-1)^2+y^2\leqq 1\}$$

とおく. 領域 D 内では,

$$(x-1)^2+y^2\leqq 1 \iff x^2+y^2\leqq 2x$$

より, 求める体積は,

$$\int_D(2x-x^2-y^2)dxdy$$

である. ここで, $\begin{cases} x=r\cos\theta+1\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ とおく. このとき, $0\leqq\theta\leqq 2\pi$, $0\leqq (x-1)^2+y^2\leqq 1$ より, $0\leqq r\leqq 1$ である. また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int_D(2x-x^2-y^2)dxdy &= \int_D\{1-(x-1)^2-y^2\}dxdy\\ &= \int_0^1\left\{\int_0^{2\pi}(1-r^2)|r|d\theta\right\}dr\\ &= \int_0^1\left\{\int_0^{2\pi}(r-r^3)d\theta\right\}dr\\ &= \int_0^1(r-r^3)dr\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\\ &= \left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1[\theta]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ここで, 最後から 3 番目の等号は, 演習問題 4.3 の結果を利用した.

(6) 求める体積は, 曲面 $z = \left(1 - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ と xy-平面との間の部分の体積を 2 倍すればよい. この曲面と xy-平面との交線は $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ である. よって, この曲線の内側の部分の体積を求めればよい.

$$D = \{(x, y);\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqq 1\}$$

とおく. 領域 D 内では, $z = \left(1 - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \geqq 0$
より, 求める体積は,

$$2\int_D \left(1 - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dxdy$$

である. ここで, $\begin{cases} x = r^3\cos^3\theta \\ y = r^3\sin^3\theta \end{cases}$ とおく. このとき, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqq 1$ より, $0 \leqq r \leqq 1$ である. また, ヤコビアンは

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3r^2\cos^3\theta & -3r^3\cos^2\theta\sin\theta \\ 3r^2\sin^3\theta & 3r^3\sin^2\theta\cos\theta \end{vmatrix} = 9r^5\sin^2\theta\cos^2\theta\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}2\int_D \left(1 - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dxdy &= 2\int_0^1 \left\{\int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} |9r^5\sin^2\theta\cos^2\theta| d\theta\right\} dr \\ &= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta \cdot \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r^5 dr \\ &= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta \cdot \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r^5 dr \\ &= \frac{9}{2}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r^5 dr \\ &= \frac{9}{2}\pi \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r^5 dr\end{aligned}$$

なお, ここで, 2 番目の等号は, 演習問題 4.3 の結果を利用した. ここで, $r^2 = t$ とおくと, $2rdr = dt$,

r	$0 \to 1$
t	$0 \to 1$

. よって,

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{9}{4}\pi \int_0^1 (1-t)^{\frac{3}{2}} t^2 dt \\
&= \frac{9}{4}\pi B\left(3, \frac{5}{2}\right) \qquad (\text{ベータ関数の定義}) \\
&= \frac{9}{4}\pi \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{11}{2})} \qquad (\text{例題 } 4.9) \\
&= \frac{9}{4}\pi \frac{2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)\Gamma(\frac{5}{2})}{\frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \Gamma(\frac{5}{2})} \qquad (\text{例題 } 4.7) \\
&= \frac{9}{4}\pi \frac{2 \cdot 1}{\frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{4}{35}\pi
\end{aligned}$$

(7) 求める体積は, 曲面 $z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$ と xy-平面との間の部分の体積を 2 倍すればよい. この曲面と xy-平面との交線は $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ である. よって, この曲線の内側の部分の体積を求めればよい.

$$D = \{(x, y);\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1\}$$

とおく. 領域 D 内では, $z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \geqq 0$ より, 求める体積は,

$$2\int_D c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dxdy$$

である. ここで, $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ とおく. このとき, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq r \leqq 1$ である. また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

よって,

$$
\begin{aligned}
2\int_D c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}dxdy &= 2\int_0^1\left\{\int_0^{2\pi} abc\sqrt{1-r^2}|r|d\theta\right\}dr \\
&= 2abc\int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr \\
&= 2abc[\theta]_0^{2\pi}\cdot\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr \\
&= 4abc\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr
\end{aligned}
$$

なお, ここで, 2 番目の等号は, 演習問題 4.3 の結果を利用した. ここで, $r^2=t$ とおくと, $2rdr=dt$,

r	$0\to 1$
t	$0\to 1$

. よって,

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 4abc\pi\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}dt \\
&= 2abc\pi B\left(1,\frac{3}{2}\right) && \text{(ベータ関数の定義)} \\
&= 2abc\pi\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} && \text{(例題 4.9)} \\
&= 2abc\pi\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{3}{2})}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} && \text{(例題 4.7)} \\
&= \frac{4}{3}abc\pi
\end{aligned}
$$

4.11.

(1) $z_x=2x,\ z_y=2y$ である. $D=\{(x,y);\ x^2+y^2\leqq 1\}$ とおくと, 求める表面積は

$$\int_D\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy$$

である. ここで, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{cases}$ とおく. このとき, $0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ 0\leqq r\leqq 1$ である. また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

よって,

$$\begin{aligned}\int_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2}|r|d\theta\right) dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr\end{aligned}$$

なお, ここで, 2 番目の等号は, 演習問題 4.3 の結果を利用した. ここで, $1+4r^2=t$ とおくと, $8rdr=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline r & 0\to 1 \\ \hline t & 1\to 5 \\ \hline\end{array}$. よって,

$$与式 = 2\pi \int_1^5 t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{8}dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

(2) $z=1-x-y$ の $x,y,z \geqq 0$ の部分の表面積を求めればよい. $z_x=-1$, $z_y=-1$ である. また,

$$z = 1-x-y \geqq 0 \iff 1 \geqq x+y$$

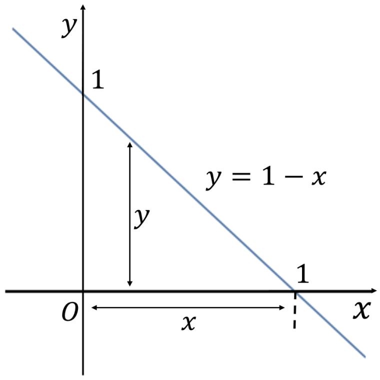
を踏まえて,

$$\begin{aligned}D &= \{(x,y);\ x,y,z \geqq 0\} \\ &= \{(x,y);\ x+y \leqq 1, x,y \geqq 0\}\end{aligned}$$

とおくと, 求める表面積は

$$\int_D \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy$$

である. 領域 D は次の図の三角形の内部となっている.



これより, D は次のように書くことができる.

$$D = \{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1-x\}$$

よって,

$$\int_D \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} dy\right) dx$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1 [y]_0^{1-x}\, dx$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1 (1-x)dx$$
$$= \sqrt{3}\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

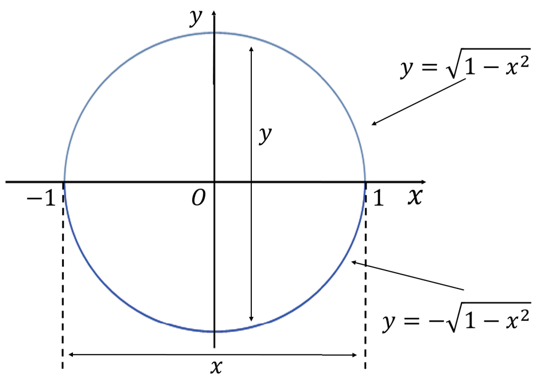
(3) 最初に

$$x^2 + z^2 = 1 \iff z = \pm\sqrt{1-x^2}$$

より, 領域 D における $z = \sqrt{1-x^2}$ の表面積を 2 倍すればよい. $z_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $z_y = 0$ より, 求める表面積は

$$2\int_D \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dxdy$$

である. 領域 D は次の単位円の内部となっている.



これより, D は次のように書くことができる.

$$D = \{(x,y);\ -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
2\int_D \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dxdy &= 2\int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dxdy \\
&= 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dy\right)dx \\
&= 2\int_{-1}^{1}\left[\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= 2\int_{-1}^{1}2dx \\
&= 4[x]_{-1}^{1} = 8
\end{aligned}
$$

(4) 最初に

$$
x^2+y^2+z^2=1 \iff z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}
$$

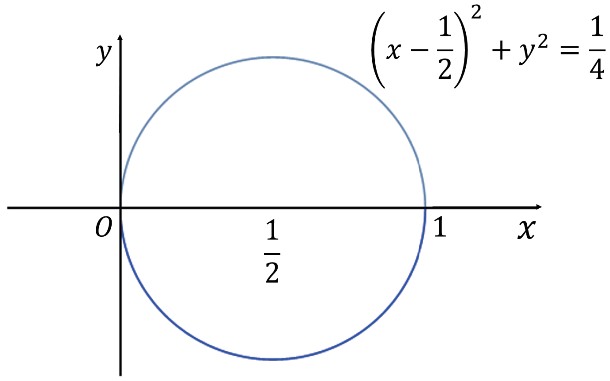
より, 領域 D における $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ の表面積を 2 倍すればよい. $z_x = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $z_y = -\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ より, 求める表面積は

$$
2\int_D \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2}dxdy
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 \leqq x &\iff x^2-x+y^2 \leqq 0 \\
&\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

より, 領域 D は次の円の内部になる.



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $x^2 + y^2 \leqq x$ より, $0 \leqq r^2 \leqq r\cos\theta$, すなわち, $0 \leqq r \leqq \cos\theta$. また, 図より $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\begin{aligned}
&2\int_D \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2} dxdy \\
&= 2\int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr\right) d\theta
\end{aligned}$$

ここで, $1 - r^2 = t$ とおくと, $-2rdr = dt$, $\begin{array}{|c|c|} \hline r & 0 \to \cos\theta \\ \hline t & 1 \to \sin^2\theta \\ \hline \end{array}$. よって,

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_1^{\sin^2\theta} t^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) dt\right\} d\theta \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2\sqrt{t}\right]_1^{\sin^2\theta} d\theta \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sqrt{\sin^2\theta}\right) d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)\, d\theta + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + \sin\theta)\, d\theta \\
&= 2[\theta + \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2[\theta - \cos\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\pi - 4
\end{aligned}$$