例題と演習で学ぶ　微分積分学　演習問題解答
(第 6 刷にも対応)

第 4 章

4.1.

(1) $D=[0,1]\times[1,2]$ より,

$$\begin{aligned}\int_D (2x-y)dxdy &= \int_0^1 \left\{\int_1^2 (2x-y)dy\right\} dx \\ &= \int_0^1 \left[2xy-\frac{1}{2}y^2\right]_1^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(2x-\frac{3}{2}\right) dx = \left[x^2-\frac{3}{2}x\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) $D=[1,2]\times[2,3]$ より,

$$\begin{aligned}\int_D (x^2y+y^2)dxdy &= \int_1^2 \left\{\int_2^3 (x^2y+y^2)dy\right\} dx \\ &= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}y^3\right]_2^3 dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{5}{2}x^2+\frac{19}{3}\right) dx = \left[\frac{5}{6}x^3+\frac{19}{3}x\right]_1^2 = \frac{73}{6}\end{aligned}$$

(3) $D=[0,1]\times[-1,2]$ より,

$$\begin{aligned}\int_D (x^2+2xy+y)dxdy &= \int_0^1 \left\{\int_{-1}^2 (x^2+2xy+y)dy\right\} dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2y+xy^2+\frac{1}{2}y^2\right]_{-1}^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(3x^2+3x+\frac{3}{2}\right) dx = \left[x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right]_0^1 = 4\end{aligned}$$

(4) $D=[0,1]\times[0,2]$ より,

$$\begin{aligned}\int_D xy(x-y)dxdy &= \int_0^1 \left\{\int_0^2 (x^2y-xy^2)dy\right\} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}xy^3\right]_0^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^2-\frac{8}{3}x\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(5) $D=[0,1]\times[0,3]$ より,

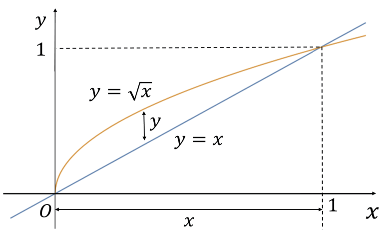
$$\begin{aligned}\int_D e^{2x+3y}dxdy &= \int_0^1\left(\int_0^3 e^{2x+3y}dy\right)dx\\ &= \int_0^1\left[\frac{1}{3}e^{2x+3y}\right]_0^3 dx\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1\left(e^{2x+9}-e^{2x}\right)dx\\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}e^{2x+9}-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{6}(e^{11}-e^9-e^2+1)\end{aligned}$$

4.2.

(1) $D=\left\{(x,y);0\leqq x\leqq\frac{1}{2},\ x^2\leqq y\leqq\frac{x}{2}\right\}$ より,

$$\begin{aligned}\int_D xdxdy &= \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x^2}^{\frac{x}{2}} xdy\right)dx\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}[xy]_{x^2}^{\frac{x}{2}}dx\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2-x^3\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{192}\end{aligned}$$

(2) 領域 D は図示すると次の曲線と直線の間の部分である.



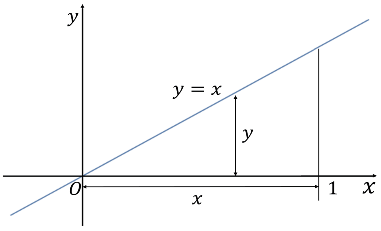
これより領域 D は

$$D=\{(x,y);\ 0\leqq x\leqq 1, x\leqq y\leqq\sqrt{x}\}$$

と書くことができる．よって，

$$\int_D ydxdy = \int_0^1 \left\{ \int_x^{\sqrt{x}} ydy \right\} dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_x^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

(3) 領域 D は図示すると次の直線の下側である．



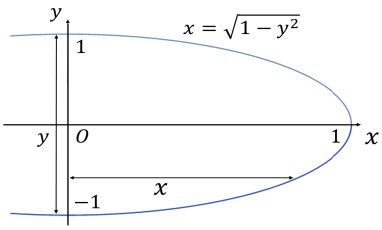
これより領域 D は

$$D = \{(x, y);\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\}$$

と書くことができる．よって，

$$\int_D xy^2 dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^x xy^2 dy \right\} dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}xy^3 \right]_0^x dx$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx$$
$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

(4) 領域 D は図示すると次の単位円の右半分である．



これより領域 D は

$$D = \{(x, y);\ -1 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq x \leqq \sqrt{1 - y^2}\}$$

と書くことができる．よって，

$$\begin{aligned}\int_D x dx dy &= \int_{-1}^{1}\left\{\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x dx\right\}dy \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-y^2)dy \\ &= \frac{1}{2}\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\int_D \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dxdy &= \int_0^1\left\{\int_0^x \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dy\right\}dx \\ &= \int_0^1\left[\frac{y^2}{2\sqrt{1+x^3}}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx\end{aligned}$$

ここで，$\sqrt{1+x^3}=t$ とおく．$\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx = dt$，

x	$0 \to 1$
t	$1 \to \sqrt{2}$

．よって，

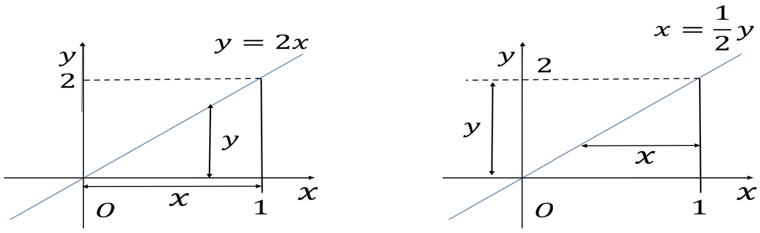
$$\text{与式} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{3}dt = \left[\frac{1}{3}t\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$$

4.3. $f(x)g(y)$ を y で定積分するとき，$f(x)$ は定数扱いとなる．ここで，$I=\displaystyle\int_c^d g(y)dy$ とおく (I は数である)．このとき，

$$\begin{aligned}\int_D f(x)g(y)dxdy &= \int_a^b\left\{\int_c^d f(x)g(y)dy\right\}dx \\ &= \int_a^b\left\{f(x)\int_c^d g(y)dy\right\}dx \\ &= \int_a^b f(x)\times I dx \\ &= \int_a^b f(x)dx \times I = \int_a^b f(x)dx \times \int_c^d g(y)dy\end{aligned}$$

4.4.

(1) この重積分の積分領域は次の左図であるが，これは右図のように見ることもできる．



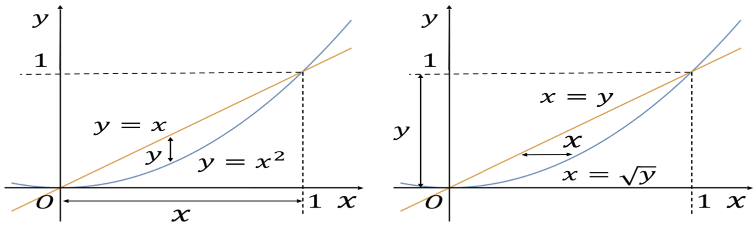
これより, D は

$$D = \{(x,y);\ 0 \leqq y \leqq 2, \frac{1}{2}y \leqq x \leqq 1\}$$

と書くことができる. よって,

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2x} f(x,y)dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 f(x,y)dx \right) dy$$

(2) この重積分の積分領域は次の左図であるが, これは右図のように見ることもできる.



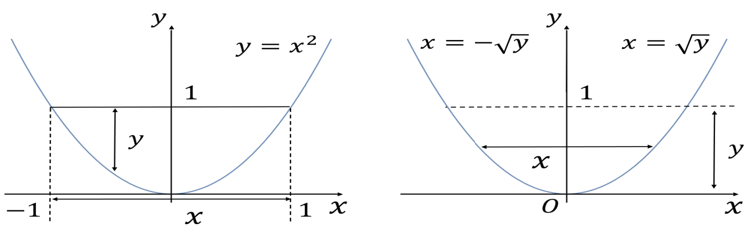
これより, D は

$$D = \{(x,y);\ 0 \leqq y \leqq 1, y \leqq x \leqq \sqrt{y}\}$$

と書くことができる. よって,

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy$$

(3) この重積分の積分領域は次の左図であるが, これは右図のように見ることもできる.



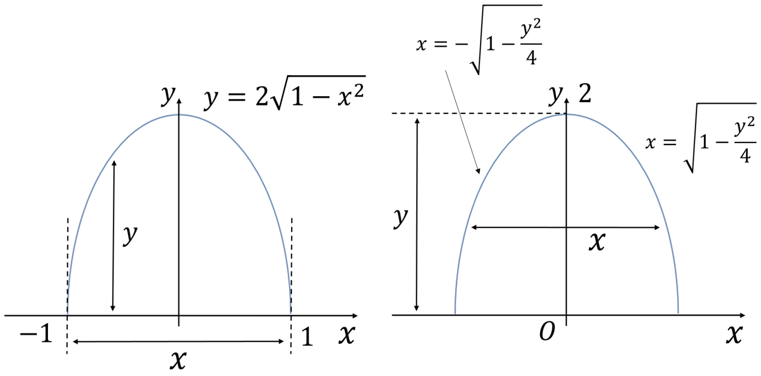
これより, D は

$$D = \{(x,y);\ 0 \leqq y \leqq 1, -\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}\}$$

と書くことができる. よって,

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{1} f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy$$

(4) この重積分の積分領域は次の左図であるが，これは右図のように見ることもできる．



これより，D は

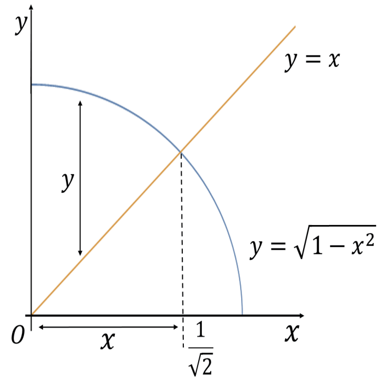
$$D=\{(x,y);\ 0\leqq y\leqq 2, -\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\leqq x\leqq\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\}$$

と書くことができる．よって，

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy\right)dx=\int_{0}^{2}\left(\int_{-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}f(x,y)dx\right)dy$$

4.5.

(1) この重積分の積分領域は次の扇形と直線ではさまれる上側の部分である．



これより，D は

$$D=\{(x,y);\ 0\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}, x\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}\}$$

と書くことができる．よって，

$$\int_{D}dxdy=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}}dy\right)dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}[y]_{x}^{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx$$

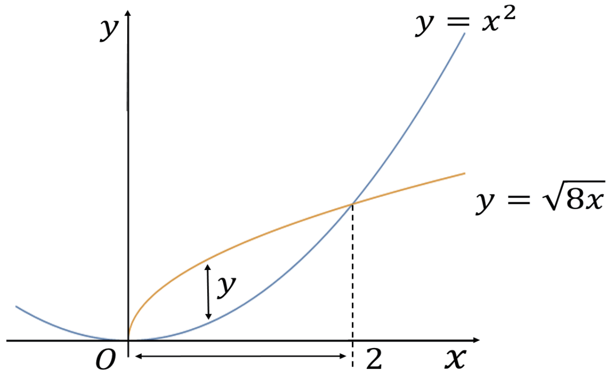
ここで, $x = \sin t$ とおくと, $dx = \cos t dt$,

x	$0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$
t	$0 \to \frac{\pi}{4}$

. よって,

$$
\begin{aligned}
与式 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t - \sin t) \cos t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 t - \sin t \cos t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2} - \frac{1}{2} \sin 2t \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

(2) 領域 D は次の 2 曲線で囲まれる部分である.



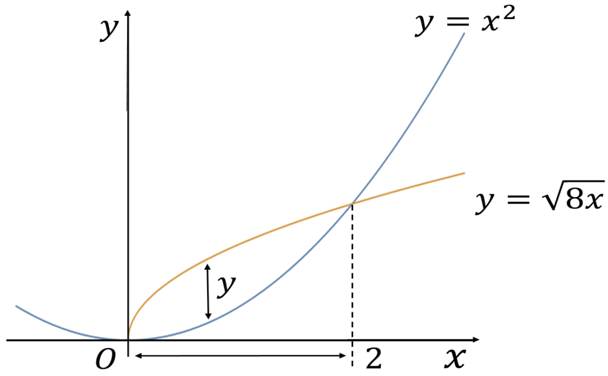
これより, D は

$$D = \{(x, y);\ 0 \leqq x \leqq 2, x^2 \leqq y \leqq 2\sqrt{2x}\}$$

と書くことができる. よって,

$$
\begin{aligned}
\int_D dxdy &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2\sqrt{2x}} dy \right) dx \\
&= \int_0^2 [y]_{x^2}^{2\sqrt{2x}} dx \\
&= \int_0^2 \left(2\sqrt{2} x^{\frac{1}{2}} - x^2 \right) dx \\
&= \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

(3) 領域 D は次の 2 曲線で囲まれる部分である.



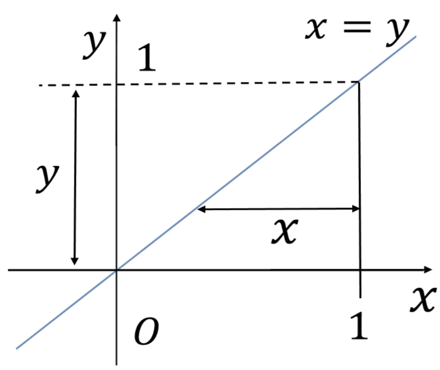
これより, D は

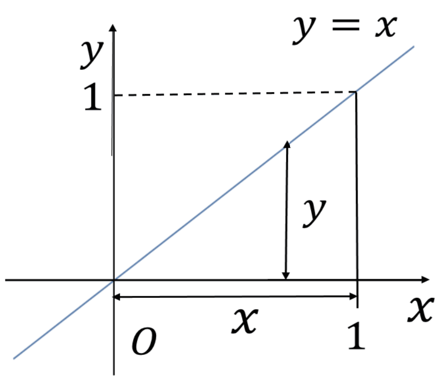
$$D = \{(x, y);\ 0 \leqq x \leqq 2, x^2 \leqq y \leqq 2\sqrt{2x}\}$$

と書くことができる. よって,

$$\begin{aligned}
\int_D y dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2\sqrt{2x}} y dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{2\sqrt{2x}} dx \\
&= \int_0^2 \left(4x - \frac{1}{2} x^4 \right) dx \\
&= \left[2x^2 - \frac{1}{10} x^5 \right]_0^2 = \frac{24}{5}
\end{aligned}$$

(4) 領域 D は次の左図の直線の下側であるが, これは右図のように見ることもできる.





これより, D は

$$D = \{(x, y);\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\}$$

と書くことができる．よって，

$$\int_D e^{x^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2} dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left[ye^{x^2} \right]_0^x dx = \int_0^1 xe^{x^2} dx$$

ここで，$x^2 = t$ とおくと，$2xdx = dt$，

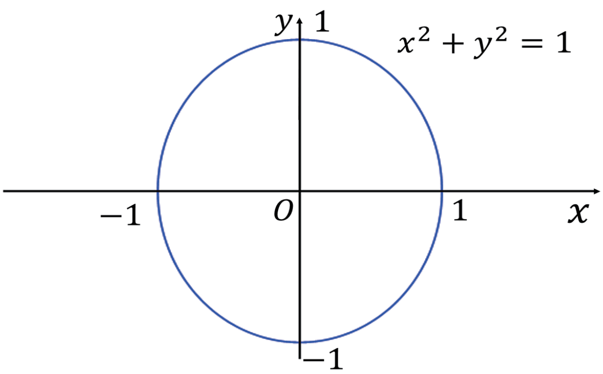
x	$0 \to 1$
t	$0 \to 1$

．よって，

$$与式 = \int_0^1 \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} \left[e^t \right]_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}$$

4.6.

(1) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．D は次の図の単位円の内側であることから，$0 \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ である．



また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

より，

$$E = \{(r, \theta);\ 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta < 2\pi\}$$

とおけば，

$$\int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy = \int_E \sqrt{1 - r^2} |r| drd\theta$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r\sqrt{1 - r^2} d\theta \right) dr$$
$$= \int_0^1 \left[r\sqrt{1 - r^2}\theta \right]_0^{2\pi} dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2} dr$$

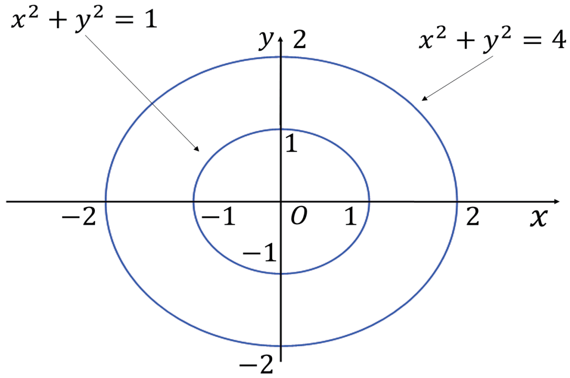
ここで, $1-r^2=t$ とおくと, $-2rdr=dt$,

r	$0\to 1$
t	$1\to 0$

. よって,

$$与式 = -\pi\int_1^0 \sqrt{t}dt = \pi\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt = \pi\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi$$

(2) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. D は次の円にはさまれた部分であることから, $1 \leqq r \leqq 2$, $0\leqq\theta<2\pi$ である.



また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

より,

$$E = \{(r,\theta);\ 1\leqq r\leqq 2, 0\leqq\theta<2\pi\}$$

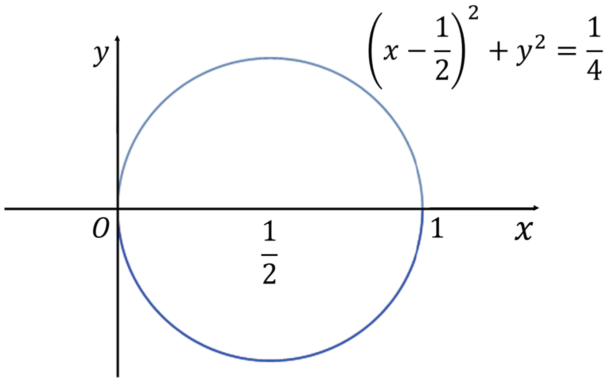
とおけば,

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^6}dxdy &= \int_E \frac{1}{r^{12}}|r|drd\theta \\
&= \int_1^2\left(\int_0^{2\pi} r^{-11}d\theta\right)dr \\
&= \int_1^2 \left[r^{-11}\theta\right]_0^{2\pi} dr \\
&= 2\pi\int_1^2 r^{-11}dr \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{10}r^{-10}\right]_1^2 = \frac{1023}{5120}\pi
\end{aligned}$$

(3) 最初に,

$$\begin{aligned}
x^2+y^2\leqq x &\Longleftrightarrow\ x^2-x+y^2\leqq 0 \\
&\Longleftrightarrow\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

より, 領域 D は次の円の内部になる.



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $x^2+y^2 \leqq x$ より, $0 \leqq r^2 \leqq r\cos\theta$, すなわち, $0 \leqq r \leqq \cos\theta$. また, 図より $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_D x dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} r\cos\theta |r| dr \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 \cos\theta \right]_0^{\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

なお, 最後の定積分の計算は, 例題 2.16 の結果を用いた.

4.7.

(1) $\begin{cases} x+y=u \\ y-x=v \end{cases}$ とおく. このとき, $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$ である. また, $\begin{cases} x=\frac{u-v}{2} \\ y=\frac{u+v}{2} \end{cases}$ より, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_D y dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{u+v}{2} \cdot \frac{1}{2} dv \right) du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left[uv + \frac{1}{2}v^2 \right]_0^1 du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(u + \frac{1}{2} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u \right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ とおく. このとき, $0 \leqq u \leqq 2$, $0 \leqq v \leqq 2$ である. また, $\begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}$ より, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_D (x-y)e^{x+y} dxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^2 ve^u \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| dv \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\frac{1}{2} v^2 e^u \right]_0^2 du \\ &= \int_0^2 e^u du \\ &= [e^u]_0^2 = e^2 - 1 \end{aligned}$$

(3) $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. このとき, $x,y \geqq 0$ より $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $1 \leqq x+y \leqq 3$ より, $\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta} \leqq r \leqq \dfrac{3}{\cos\theta+\sin\theta}$ である. また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{3}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{r^2}{r^3(\cos\theta+\sin\theta)^3}|r|dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{3}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}\right]_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{3}{\cos\theta+\sin\theta}}d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{[\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})]^4}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4(\theta+\frac{\pi}{4})}d\theta
\end{aligned}$$

ここで, $t=\theta+\dfrac{\pi}{4}$ とおくと, $d\theta=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline \theta & 0\to\frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{4}\to\frac{3}{4}\pi \\ \hline\end{array}$ より,

$$与式 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sin^4 t}dt$$

さらに, $s=\tan\dfrac{t}{2}$ とおくと, $\sin t=\dfrac{2s}{1+s^2}$, $dt=\dfrac{2}{1+s^2}ds$, $\begin{array}{|c|c|}\hline t & \frac{\pi}{4}\to\frac{3}{4}\pi \\ \hline s & \tan\frac{\pi}{8}\to\tan\frac{3}{8}\pi \\ \hline\end{array}$.

ここで,

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{8} &= \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}-1 \\
\tan\frac{3}{8}\pi &= \frac{\cos\frac{3}{8}\pi}{\sin\frac{3}{8}\pi} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{1+\cos\frac{3}{4}\pi}} = \sqrt{2}+1
\end{aligned}$$

から,

t	$\dfrac{\pi}{4} \to \dfrac{3}{4}\pi$
s	$\sqrt{2}-1 \to \sqrt{2}+1$

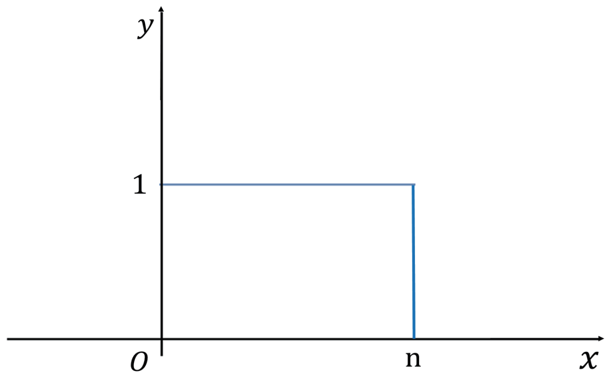
. よって,

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{(1+s^2)^4}{16s^4}\cdot\frac{2}{1+s^2}ds \\
&= \frac{1}{16}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{(s^2+1)^3}{s^4}ds \\
&= \frac{1}{16}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \left(s^2+3+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s^4}\right)ds \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}s^3+3s-\frac{3}{s}-\frac{1}{3s^3}\right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

なお, 最後の行の代入後の計算は, 分母の有理化をすることによって整理することが出来る.

4.8.

(1) $D_n = \{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq n, 0 \leqq y \leqq 1\}$ とする. $\{D_n\}$ は D の単調近似列である. また, 領域 D_n は次の長方形の内部となっている.

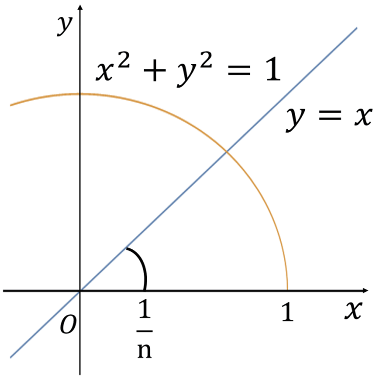


$$\begin{aligned}
\int_{D_n} e^{-(x+y)}dxdy &= \int_0^n e^{-x}dx \int_0^1 e^{-y}dy \\
&= \left[-e^{-x}\right]_0^{-n}\left[-e^{-y}\right]_0^1 = \left(1-\frac{1}{e}\right)\left(1-\frac{1}{e^n}\right)
\end{aligned}$$

ここで, 最初の等号は演習問題 4.3 の結果を利用した. また, D 内で $e^{-(x+y)} \geqq 0$ より,

$$\begin{aligned}
\int_D e^{-(x+y)}dxdy &= \lim_{n\to\infty}\int_{D_n} e^{-(x+y)}dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{e}\right)\left(1-\frac{1}{e^n}\right) = 1-\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

(2) $D_n = \left\{(x,y);\ 0 \leqq y \leqq x, \dfrac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする．$\{D_n\}$ は D の単調近似列である．また，領域 D_n は次の扇形ではさまれた部分となっている．



ここで，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．このとき，$0 \leqq y \leqq x$ より $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1$ より，$\dfrac{1}{n} \leqq r \leqq 1$ である．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって，

$$\begin{aligned}
\int_{D_n} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{r\cos\theta}{r} \cdot |r| dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta \cdot \int_{\frac{1}{n}}^1 r dr \\
&= [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right)
\end{aligned}$$

ここで，2 番目の等号は演習問題 4.3 の結果を利用した． また，D 内で $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqq 0$ より，

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

4.9.

(1) $\dfrac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(0.5)} = \dfrac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \dfrac{3}{4}$

(2) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

なお, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ は, 例題 4.10 の結果を利用した.

(3) $x^2=t$ とおくと, $x=\sqrt{t}$, $dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 0\to\infty \\ \hline t & 0\to\infty \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-t}dt \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(2)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\Gamma(1)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(4) $\log x=t$ とおくと, $x=e^t$, $dx=e^tdt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline x & 1\to\infty \\ \hline t & 0\to\infty \\ \hline\end{array}$. よって,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{\log x}}dx=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

4.10.

(1) 領域 D において $xy\geqq 0$ なので, 求める体積は $\int_D xydxdy$ である. ここで, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. このとき, $x,y\geqq 0$ より $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$, $0\leqq x^2+y^2\leqq 1$ より, $0\leqq r\leqq 1$ である. また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int_D xydxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta\cdot|r|dr\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\cdot\int_0^1 r^3dr \\ &= \frac{1}{4}\left[-\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

ここで, 2 番目の等号は演習問題 4.3 の結果を利用した.

(2) $x+z=1 \iff z=-x+1$ である. 領域 D 内では $-1\leqq x\leqq 1$ より, $z=-x+1\geqq 0$ である. よって, 求める体積は $\int_D(-x+1)dxdy$ となる. ここで, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. このとき, $0\leqq\theta\leqq 2\pi$, $0\leqq x^2+y^2\leqq 1$ より,

$0 \leqq r \leqq 1$ である．また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int_D (-x+1)dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} (-r\cos\theta + 1)|r|d\theta \right\} dr \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} (-r^2\cos\theta + r)d\theta \right\} dr \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}r^3\cos\theta + \frac{1}{2}r^2 \right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\theta \right) d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3}\sin\theta \right]_0^{2\pi} = \pi
\end{aligned}$$

(3) （第５刷までの解答）$D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ とする．$x^2+y^2+z^2 = 1 \iff z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ である．求める体積は上半分の体積を２倍すればよい, すなわち, $2\displaystyle\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ である．ここで, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．このとき, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq x^2+y^2 \leqq 1$ より, $0 \leqq r \leqq 1$ である．また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\begin{aligned}
2\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy &= 2\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2}\cdot|r|d\theta \right) dr \\
&= 2\int_0^1 \left[r\sqrt{1-r^2}\theta \right]_0^{2\pi} dr = 4\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr
\end{aligned}$$

ここで, $1-r^2 = t$ とおく．$-2rdr = dt$,

r	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

. よって,

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= 4\pi\int_1^0 t^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) dt \\
&= 2\pi\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt \\
&= 2\pi\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

(3) （第 6 刷の解答) $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq 1/4\}$ とする．$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \iff z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ である．求める体積は上半分の体積を 2 倍すればよい，すなわち，$2\int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy$ である．ここで，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．このとき，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1/4$ より，$0 \leqq r \leqq 1/2$ である．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって，

$$\begin{aligned} 2\int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy &= 2\int_0^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - r^2} \cdot |r| d\theta\right) dr \\ &= 2\int_0^{1/2} \left[r\sqrt{1 - r^2}\theta\right]_0^{2\pi} dr = 4\pi \int_0^{1/2} r\sqrt{1 - r^2}dr \end{aligned}$$

ここで，$1 - r^2 = t$ とおく．$-2rdr = dt$,

r	$0 \to 1/2$
t	$1 \to 3/4$

. よって，

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 4\pi \int_1^{3/4} t^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) dt \\ &= 2\pi \int_{3/4}^1 t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{3/4}^1 = \frac{\pi}{6}(8 - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

(4) 平面 $z = 1$ と曲面 $z = x^2 + y^2$ の交線は，$x^2 + y^2 = 1$ である．よって，この曲線の内側の部分における体積を求めればよい．

$$D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

とおくと，領域 D 内では，$1 \geqq x^2 + y^2$ より，求める体積は，

$$\int_D (1 - x^2 - y^2)dxdy$$

である．ここで，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．このとき，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1$ より，$0 \leqq r \leqq 1$ である．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\int_D (1-x^2-y^2)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-r^2)|r|d\theta \right) dr$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r-r^3)d\theta \right) dr$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 (r-r^3)dr$$
$$= [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

ここで, 最後から 3 番目の等号は, 演習問題 4.3 の結果を利用した.

(5) 曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2x$ の交線は

$$x^2 + y^2 = 2x \iff (x-1)^2 + y^2 = 1$$

である. よって, この曲線の内側の部分の体積を求めればよい.

$$D = \{(x, y);\ (x-1)^2 + y^2 \leqq 1\}$$

とおく. 領域 D 内では,

$$(x-1)^2 + y^2 \leqq 1 \iff x^2 + y^2 \leqq 2x$$

より, 求める体積は,

$$\int_D (2x - x^2 - y^2)dxdy$$

である. ここで, $\begin{cases} x = r\cos\theta + 1 \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. このとき, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq (x-1)^2 + y^2 \leqq 1$ より, $0 \leqq r \leqq 1$ である. また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\int_D (2x - x^2 - y^2)dxdy = \int_D \{1 - (x-1)^2 - y^2\}dxdy$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} (1-r^2)|r|d\theta \right\} dr$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} (r-r^3)d\theta \right\} dr$$
$$= \int_0^1 (r-r^3)dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^1 [\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

ここで, 最後から 3 番目の等号は, 演習問題 4.3 の結果を利用した.

(6) 求める体積は, 曲面 $z = \left(1 - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ と xy-平面との間の部分の体積を 2 倍すればよい. この曲面と xy-平面との交線は $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ である. よって, この曲線の内側の部分の体積を求めればよい.

$$D = \{(x, y);\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqq 1\}$$

とおく. 領域 D 内では, $z = \left(1 - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \geqq 0$
より, 求める体積は,

$$2\int_D \left(1 - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dxdy$$

である. ここで, $\begin{cases} x = r^3\cos^3\theta \\ y = r^3\sin^3\theta \end{cases}$ とおく. このとき, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqq 1$ より, $0 \leqq r \leqq 1$ である. また, ヤコビアンは

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3r^2\cos^3\theta & -3r^3\cos^2\theta\sin\theta \\ 3r^2\sin^3\theta & 3r^3\sin^2\theta\cos\theta \end{vmatrix} = 9r^5\sin^2\theta\cos^2\theta \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} 2\int_D \left(1 - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dxdy &= 2\int_0^1 \left\{\int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} |9r^5\sin^2\theta\cos^2\theta| d\theta\right\} dr \\ &= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta \cdot \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r^5 dr \\ &= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta \cdot \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r^5 dr \\ &= \frac{9}{2}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r^5 dr \\ &= \frac{9}{2}\pi\int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r^5 dr \end{aligned}$$

なお, ここで, 2 番目の等号は, 演習問題 4.3 の結果を利用した. ここで, $r^2 = t$ とおくと, $2rdr = dt$,

r	$0 \to 1$
t	$0 \to 1$

. よって,

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{9}{4}\pi \int_0^1 (1-t)^{\frac{3}{2}} t^2 dt \\
&= \frac{9}{4}\pi B\left(3, \frac{5}{2}\right) \qquad \text{(ベータ関数の定義)} \\
&= \frac{9}{4}\pi \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{11}{2})} \qquad \text{(例題 4.9)} \\
&= \frac{9}{4}\pi \frac{2\cdot 1\cdot \Gamma(1)\Gamma(\frac{5}{2})}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\Gamma(\frac{5}{2})} \qquad \text{(例題 4.7)} \\
&= \frac{9}{4}\pi \frac{2\cdot 1}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{4}{35}\pi
\end{aligned}$$

(7) 求める体積は, 曲面 $z = c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$ と xy-平面との間の部分の体積を 2 倍すればよい. この曲面と xy-平面との交線は $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ である. よって, この曲線の内側の部分の体積を求めればよい.

$$D = \{(x,y);\ \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1\}$$

とおく. 領域 D 内では, $z = c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2} \geqq 0$ より, 求める体積は,

$$2\int_D c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}dxdy$$

である. ここで, $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ とおく. このとき, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq r \leqq 1$ である. また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

よって,

$$2\int_D c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}dxdy = 2\int_0^1\left\{\int_0^{2\pi} abc\sqrt{1-r^2}|r|d\theta\right\}dr$$
$$= 2abc\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr$$
$$= 2abc[\theta]_0^{2\pi}\cdot\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr$$
$$= 4abc\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr$$

なお, ここで, 2 番目の等号は, 演習問題 4.3 の結果を利用した. ここで, $r^2=t$ とおくと, $2rdr=dt$,

r	$0\to 1$
t	$0\to 1$

. よって,

$$与式 = 4abc\pi\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$= 2abc\pi B\left(1,\frac{3}{2}\right) \qquad (ベータ関数の定義)$$
$$= 2abc\pi\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} \qquad (例題 4.9)$$
$$= 2abc\pi\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{3}{2})}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} \qquad (例題 4.7)$$
$$= \frac{4}{3}abc\pi$$

4.11.

(1) $z_x=2x,\ z_y=2y$ である. $D=\{(x,y);\ x^2+y^2\leqq 1\}$ とおくと, 求める表面積は

$$\int_D\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy$$

である. ここで, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. このとき, $0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ 0\leqq r\leqq 1$ である. また, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

よって,

$$\int_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2}|r|d\theta\right) dr$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr$$
$$= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr$$

なお, ここで, 2 番目の等号は, 演習問題 4.3 の結果を利用した. ここで, $1+4r^2=t$ とおくと, $8rdr=dt$,

r	$0 \to 1$
t	$1 \to 5$

. よって,

$$\text{与式} = 2\pi \int_1^5 t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{8}dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

(2) $z=1-x-y$ の $x,y,z \geqq 0$ の部分の表面積を求めればよい. $z_x=-1$, $z_y=-1$ である. また,

$$z=1-x-y \geqq 0 \iff 1 \geqq x+y$$

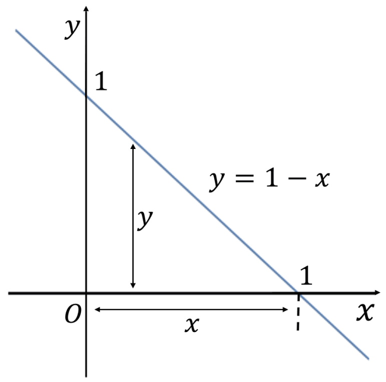
を踏まえて,

$$D = \{(x,y);\ x,y,z \geqq 0\}$$
$$= \{(x,y);\ x+y \leqq 1, x,y \geqq 0\}$$

とおくと, 求める表面積は

$$\int_D \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy$$

である. 領域 D は次の図の三角形の内部となっている.



これより, D は次のように書くことができる.

$$D = \{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1-x\}$$

よって,

$$\int_D \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} dy\right) dx$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1 [y]_0^{1-x}\, dx$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1 (1-x)dx$$
$$= \sqrt{3}\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

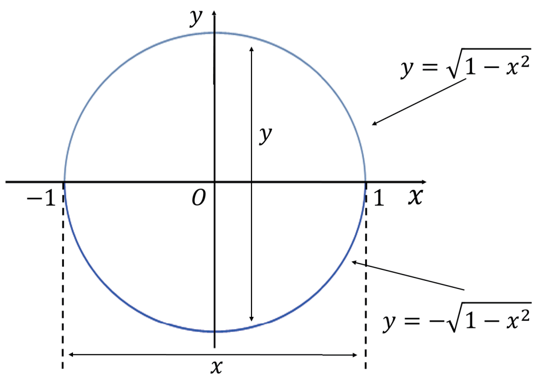
(3) 最初に

$$x^2+z^2=1 \iff z=\pm\sqrt{1-x^2}$$

より, 領域 D における $z=\sqrt{1-x^2}$ の表面積を 2 倍すればよい. $z_x = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $z_y=0$ より, 求める表面積は

$$2\int_D \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dxdy$$

である. 領域 D は次の単位円の内部となっている.



これより, D は次のように書くことができる.

$$D=\{(x,y);\ -1\leqq x\leqq 1, -\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq \sqrt{1-x^2}\}$$

よって,

$$2\int_D \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dxdy = 2\int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dxdy$$
$$= 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dy\right)dx$$
$$= 2\int_{-1}^{1}\left[\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= 2\int_{-1}^{1} 2dx$$
$$= 4[x]_{-1}^{1} = 8$$

(4) 最初に

$$x^2+y^2+z^2=1 \iff z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

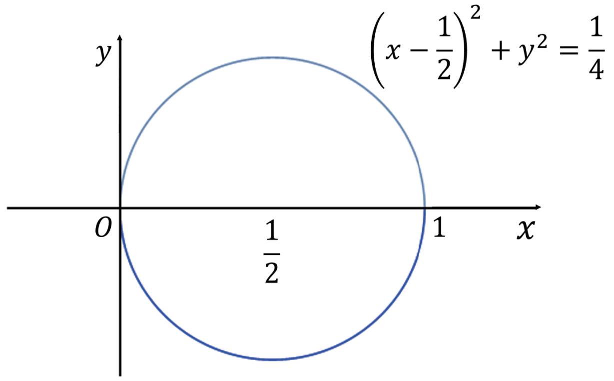
より, 領域 D における $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ の表面積を 2 倍すればよい. $z_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $z_y = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ より, 求める表面積は

$$2\int_D \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2}dxdy$$

ここで,

$$x^2+y^2 \leqq x \iff x^2-x+y^2 \leqq 0$$
$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \frac{1}{4}$$

より, 領域 D は次の円の内部になる.



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $x^2+y^2 \leqq x$ より, $0 \leqq r^2 \leqq r\cos\theta$, すなわち, $0 \leqq r \leqq \cos\theta$. また, 図より $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって,

$$\begin{aligned}
&2\int_D \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2}dxdy \\
&= 2\int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr\right) d\theta
\end{aligned}$$

ここで, $1-r^2=t$ とおくと, $-2rdr=dt$, $\begin{array}{|c|c|}\hline r & 0 \to \cos\theta \\ \hline t & 1 \to \sin^2\theta \\ \hline \end{array}$. よって,

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_1^{\sin^2\theta} t^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)dt\right\} d\theta \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2\sqrt{t}\right]_1^{\sin^2\theta} d\theta \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sqrt{\sin^2\theta}\right) d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\theta)\,d\theta + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1+\sin\theta)\,d\theta \\
&= 2[\theta+\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2[\theta-\cos\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\pi-4
\end{aligned}$$