例題と演習で学ぶ　微分積分学　演習問題解答
(第 6 刷にも対応)

第 3 章

3.1.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,2)}(2x+y)=2(-1)+2=0.$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{2xy}{x^2-y}=\frac{2\times 1\times 2}{1^2-2}=-4.$

(3) （第 5 刷まで）$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$$

ゆえに, θ の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない.

(4) （第 6 刷）$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}{r^2}=1+2\cos\theta\sin\theta$$

ゆえに, θ の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない.

(5) $y=mx^2$ とおくと, $(x,y)\to(0,0)$ より $x\to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+mx^2}=\frac{1}{1+m}$$

ゆえに, m の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない.

(6) $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}&=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2}\\&=\lim_{r\to 0}r^2\cos^2\theta\sin^2\theta=0\end{aligned}$$

【別解】　相加相乗平均の不等式 $x^2y^2\leqq\dfrac{x^4+y^4}{2}$ より,

$$\begin{aligned}0\le\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}&\le\frac{x^4+y^4}{2(x^2+y^2)}\\&=\frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{2(x^2+y^2)}\\&\le\frac{(x^2+y^2)^2}{2(x^2+y^2)}=\frac{x^2+y^2}{2}\end{aligned}$$

ここで, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{2} = 0$ より, はさみうちの原理から $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$.

(7) $y = mx^3$ とおくと, $(x,y) \to (0,0)$ より $x \to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^3+y} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^3+mx^3} = \frac{m}{1+m}$$

ゆえに, m の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない.

(8) $-1 \leqq \sin\dfrac{y}{x} \leqq 1$ より, $-x^2 \leqq x^2\sin\dfrac{y}{x} \leqq x^2$. よって, はさみうちの原理より, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\sin\dfrac{y}{x} = 0$.

(9) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r \to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{r^2} = 1$$

(10) $y = mx$ とおくと, $(x,y)\to(0,0)$ より $x \to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x}{2x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2x+mx} = \frac{3}{2+m}$$

ゆえに, m の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない.

3.2.

(1) $f(0,0) = -1$ より, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続である. よって, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ を計算すれば良い.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{2\times 0-1}{\sqrt{0^2+0^2+1}} = -1$$

よって, $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続である.

(2) $f(0,0) = 0$ より, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続である. よって, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ を計算すれば良い. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r \to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

ゆえに, θ の値によって極限値が異なるので, 極限値は存在しない. よって, $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続ではない.

(3) $f(0,0)=0$ より, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続となる. よって, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ を計算すればよい. $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta-\sin^3\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta-\sin^3\theta)=0$$

よって, $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続である.

【極限の計算の別解】

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| &= \left|\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+y^2}\right| \\ &= |x-y|\left|1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \\ &\leqq |x-y|\left(1+\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\right) \\ &\leqq |x-y|\left(1+\frac{x^2+y^2}{2(x^2+y^2)}\right) = \frac{3}{2}|x-y| \end{aligned}$$

ここで, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}|x-y|=0$ より, はさみうち原理から $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$.

(4) $f(0,0)=0$ より $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続となる. よって, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ を計算すればよい. $\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leqq 1$ より,

$$0 \leqq \left|xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leqq |xy|$$

ここで, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy=0$ より, はさみうちの原理から $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\cos\frac{1}{x^2+y^2} = 0$ となるので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続である.

3.3. $f_x(x,y)$ は y を定数とみて x で微分をすればよい, また, $f_y(x,y)$ は x を定数とみて y で微分をすればよい. なお, 数式を x で偏微分する場合は $(\text{数式})_x$ と書くことにする. または 数式を y で偏微分する場合は $(\text{数式})_y$ と書くことにする.

(1) $f_x(x,y)=(x^2)_x+(2xy)_x+(xy^3)_x=2x+2y+y^3$,
$f_y(x,y)=(x^2)_y+(2xy)_y+(xy^3)_y=2x+3xy^2$

(2) $f_x(x,y)=\frac{-y}{(x+y)^2}(x+y)_x=-\frac{y}{(x+y)^2}$,

$$f_y(x,y)=\frac{(x+y)_y y-(x+y)y_y}{(x+y)^2}=\frac{y-(x+y)}{(x+y)^2}=-\frac{x}{(x+y)^2}$$

$$(3)\ \ f_x(x,y) = \frac{-(x^2-y^2)_x}{(x^2-y^2)^2} = -\frac{2x}{(x^2-y^2)^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{-(x^2-y^2)_y}{(x^2-y^2)^2} = \frac{2y}{(x^2-y^2)^2}$$

$$(4)\ \ f_x(x,y) = 1-y+\frac{1}{y^2},$$
$$f_y(x,y) = 3-x-\frac{x(y^2)_y}{y^4} = 3-x-\frac{2x}{y^3}$$

(5) $f(x,y) = (\sqrt{x}-y)^2 = x-2x^{\frac{1}{2}}y+y^2$ より,
$$f_x(x,y) = 1-x^{-\frac{1}{2}}y = 1-\frac{y}{\sqrt{x}}$$
$$f_y(x,y) = -2x^{\frac{1}{2}}+2y = -2\sqrt{x}+2y$$

$$(6)\ \ f_x(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\left(\frac{x}{y}\right)_x = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{y}{y^2} = \frac{y}{x^2+y^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\left(\frac{x}{y}\right)_y = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$(7)\ \ f_x(x,y) = (xy)_x\cos(x+y)+xy\{\cos(x+y)\}_x = y\cos(x+y)-xy\sin(x+y),$$
$$f_y(x,y) = (xy)_y\cos(x+y)+xy\{\cos(x+y)\}_y = x\cos(x+y)-xy\sin(x+y)$$

$$(8)\ \ f_x(x,y) = \frac{1}{2}(x+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x+y^2)_x = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}},$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{2}(x+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x+y^2)_y = \frac{2y}{2\sqrt{x+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}$$

$$(9)\ \ f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\left(\frac{x}{y}\right)_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\left(\frac{x}{y}\right)_y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

3.4.

(1) $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分係数を求めればよい．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(x+\frac{1}{\sqrt{2}}r, y-\frac{1}{\sqrt{2}}r) - f(x,y)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\Bigg[\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}r\right)^2 + \left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}r\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}r\right) + \left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}r\right)^2 \\
&\qquad - (x^2+xy+y^2)\Bigg] \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\Big[x^2 + \sqrt{2}rx + \frac{1}{2}r^2 + xy - \frac{1}{\sqrt{2}}rx + \frac{1}{\sqrt{2}}ry - \frac{1}{2}r^2 \\
&\qquad + y^2 - \sqrt{2}ry + \frac{1}{2}r^2 - x^2 - xy - y^2\Big] \\
&= \lim_{r\to 0}\left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2}r - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2}y\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)
\end{aligned}$$

(2) $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ である．よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) - f(x,y)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\left[3(x+r\cos\theta)^2 + 2(x+r\cos\theta)(y+r\sin\theta) - (3x^2+2xy)\right] \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\big[3x^2 + 6rx\cos\theta + 3r^2\cos^2\theta + 2xy + 2ry\cos\theta \\
&\qquad + 2rx\sin\theta + 2r^2\sin\theta\cos\theta - 3x^2 - 2xy\big] \\
&= \lim_{r\to 0}[6x\cos\theta + 3r\cos^2\theta + 2y\cos\theta + 2x\sin\theta + 2r\sin\theta\cos\theta] \\
&= 6x\cos\theta + 2y\cos\theta + 2x\sin\theta
\end{aligned}$$

3.5.

(1) $f(x,y) = f(1,2) + P(x-1) + Q(y-2) + g(x,y)$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= f(x,y) - f(1,2) - P(x-1) - Q(y-2) \\
&= xy - 2 - P(x-1) - Q(y-2)
\end{aligned}$$

である．このとき，

$$(*) \quad \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2-P(x-1)-Q(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0$$

となる定数 P, Q が存在すれば, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,2)$ で全微分可能である. $\begin{cases} x-1=r\cos\theta \\ y-2=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(1,2)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2-P(x-1)-Q(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta+1)(r\sin\theta+2)-2-Pr\cos\theta-Qr\sin\theta}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\left[r^2\sin\theta\cos\theta+r\sin\theta+2r\cos\theta+2-2-Pr\cos\theta-Qr\sin\theta\right] \\
&= \lim_{r\to 0}\left[r\sin\theta\cos\theta+2(1-P)\cos\theta+(1-Q)\sin\theta\right] \\
&= 2(1-P)\cos\theta+(1-Q)\sin\theta
\end{aligned}$$

よって, $P=Q=1$ ならば $(*)$ が成り立つので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,2)$ で全微分可能である.

(2) $f(x,y)=f(2,-1)+P(x-2)+Q(y+1)+g(x,y)$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= f(x,y)-5-P(x-2)-Q(y+1) \\
&= x^2+y^2-5-P(x-2)-Q(y+1)
\end{aligned}$$

である. このとき,

$$(**)\quad \begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^2+y^2-5-P(x-2)-Q(y+1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0
\end{aligned}$$

となる定数 P, Q が存在すれば, $f(x,y)$ は $(x,y)=(2,-1)$ で全微分可能である. $\begin{cases} x-2=r\cos\theta \\ y+1=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(2,-1)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^2+y^2-5-P(x-2)-Q(y+1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta+2)^2+(r\sin\theta-1)^2-5-Pr\cos\theta-Qr\sin\theta}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\left[r^2\cos^2\theta+4r\cos\theta+4+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1-5-Pr\cos\theta-Qr\sin\theta\right] \\
&= \lim_{r\to 0}\left[r+4\cos\theta-2\sin\theta-P\cos\theta-Q\sin\theta\right] \\
&= (4-P)\cos\theta-(Q+2)\sin\theta
\end{aligned}$$

より, $P=4,\ Q=-2$ なら $(**)$ が成り立つ. よって $f(x,y)$ は $(x,y)=(2,-1)$ で全微分可能である.

(3) $f(x,y) = f(0,0) + Px + Qy + g(x,y)$ とおく．このとき,

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f(x,y) - Px - Qy \\ &= \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - Px - Qx & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases} \end{aligned}$$

である．このとき,

$$(***) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - (Px+Qy)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)} = 0$$

となる定数 P, Q が存在すれば, $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で全微分可能である．

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．$(x,y) \to (0,0)$ より, $r \to 0$. よって,

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - (Px+Qy)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\left(r^3\cos^2\theta\sin\theta - Pr^2\cos\theta - Qr^2\sin\theta\right) \\ &= \lim_{r\to 0}\left(r\cos^2\theta\sin\theta - P\cos\theta - Q\sin\theta\right) \\ &= -P\cos\theta - Q\sin\theta \end{aligned}$$

より, $P = Q = 0$ なら $(***)$ が成り立つ．よって $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で全微分可能である．

(4) $f(x,y) = f(0,0) + Px + Qy + g(x,y)$ とおく．このとき,

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f(x,y) - Px - Qy \\ &= \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} - Px - Qx & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases} \end{aligned}$$

である．このとき,

$$(1) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y - (Px+Qy)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)} = 0$$

となる定数 P, Q が存在すれば, $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で全微分可能である．

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく．$(x,y) \to (0,0)$ より, $r \to 0$. よって,

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y - (Px+Qy)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\left(r\cos\theta + r\sin\theta - Pr^2\cos\theta - Qr^2\sin\theta\right) \\ &= \lim_{r\to 0}\left\{\frac{1}{r}(\cos\theta + \sin\theta) - P\cos\theta - Q\sin\theta\right\} \end{aligned}$$

となり, (1) をみたす定数 P, Q は存在しない. よって $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能ではない.

3.6.

(1) $f_x(x,y)=2xy-y^2$ と $f_y(x,y)=x^2-2xy$ は共に $(x,y)=(1,1)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で全微分可能である.

$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{2}$ より, $\boldsymbol{v}'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}$ 方向における方向微分係数を求めればよい.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}'}f(1,1)=f_x(1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-f_y(1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

(2) $f_x(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y)=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$ は共に $(x,y)=(1,1)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で全微分可能である.

$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{5}$ より, $\boldsymbol{v}'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v}$ 方向における方向微分係数を求めればよい.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}'}f(1,1)=f_x(1,1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-f_y(1,1)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{3}{2\sqrt{5}}$$

(3) $f_x(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は共に $(x,y)=(1,1)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で全微分可能である. よって,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}f(1,1)=f_x(1,1)\cos\theta-f_y(1,1)\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)$$

(4) $f_x(x,y)=\log(x+y)+\dfrac{x}{x+y}$, $f_y(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$ は共に $(x,y)=(1,1)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で全微分可能である.

$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{5}$ より, $\boldsymbol{v}'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v}$ 方向における方向微分係数を求めればよい.

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}'}f(1,1)=f_x(1,1)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-f_y(1,1)\cdot\frac{3}{5}=-\frac{4}{5}\log 2-\frac{1}{10}$$

3.7.

(1) $f_x(x,y)=y^2$, $f_y(x,y)=2xy$ は共に $(x,y)=(1,2)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,2)$ で全微分可能である. よって, $(x,y)=(1,2)$ における接平面の方程式は,

$$\begin{aligned}&z=f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)+f(1,2)\\ \Longleftrightarrow\ &z=4x+4y-9\end{aligned}$$

(2) 最初に $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ を計算する. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ は存在しない為 $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続ではないので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能ではない.

(3) $f_x(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $f_y(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ は共に $(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で全微分可能である. よって, $(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接平面の方程式は,

$$\begin{aligned} & z = f_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \Longleftrightarrow & z = \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{\sqrt{6}}{3}y - \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

(4) $f_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$ は共に $(x,y)=(1,1)$ で連続なので, $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で全微分可能である. よって, $(x,y)=(1,1)$ における接平面の方程式は,

$$\begin{aligned} & z = f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + f(1,1) \\ \Longleftrightarrow & z = x + y - 2 + \log 2 \end{aligned}$$

3.8.

(1) 最初に $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ として, $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分係数を求める.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} f(0,0) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^{\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta}{r} = \cos^{\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta \end{aligned}$$

よって, $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において任意の方向に方向微分可能である.

次に $f(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能ではないことを示そう.

$$f(x,y) = f(0,0) + Px + Qy + g(x,y) = Px + Qy + g(x,y)$$

とおいて,

$$(*) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

となる定数 P, Q が存在すれば $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能である.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-Px-Qy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ここで, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $(x,y)\to(0,0)$ より, $r\to 0$. よって,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-Px-Qy}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left(r\cos^{\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta-Pr\cos\theta-Qr\sin\theta\right)\\&=\cos^{\frac{1}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta-P\cos\theta-Q\sin\theta\end{aligned}$$

ここで, $\theta=0$ のとき $(*)$ を満たすためには $P=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $(*)$ を満たすためには $Q=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき $(*)$ を満たすためには $P+Q=1$ でなければならないが, これらを全てみたす定数 P,Q は存在しない. よって $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能ではない.

3.9.

(1) $f_x(x,y)=2x+y,\ f_y(x,y)=x$ より,

$$f_{xx}(x,y)=2,\ f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=1,\ f_{yy}(x,y)=0.$$

(2) $f_x(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$,

$f_y(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$ より,

$$f_{xx}(x,y)=\left\{(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}_x=-\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=\frac{x}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=-\frac{y}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\begin{aligned}f_{yy}(x,y)&=\frac{x}{y^2(y^2-x^2)}\left\{\sqrt{y^2-x^2}+\frac{2y^2}{\sqrt{y^2-x^2}}\right\}\\&=\frac{x}{y^2(y^2-x^2)}\cdot\frac{3y^2-x^2}{\sqrt{y^2-x^2}}=\frac{3xy^2-x^3}{y^2(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(3) $f_x(x,y) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$,
$f_y(x,y) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$ より,

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_{yy}(x,y) = -\frac{x\cdot(-2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

(4) $f_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $f_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$ より,

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}\left\{\sqrt{x^2-y^2} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right\}$$
$$= \frac{x^2-y^2-x^2}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y^2}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{x}{x^2-y^2}\cdot\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right) = \frac{xy}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}\left\{-\sqrt{x^2-y^2} + y\cdot\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)\right\}$$
$$= \frac{-x^2+y^2-y^2}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x^2}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(5) $f_x(x,y) = yx^{y-1},\ f_y(x,y) = x^y \log x$ より,
$$f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\log x = x^{y-1}(1+y\log x)$$
$$f_{yy}(x,y) = x^y(\log y)^2$$

(6) $f_x(x,y) = e^{x-y},\ f_y(x,y) = -e^{x-y}$ より,
$f_{xx}(x,y) = e^{x-y},\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -e^{x-y},\ f_{yy}(x,y) = e^{x-y}$

3.10.

(1) $f_x(x,y) = 2xy^3,\ f_y(x,y) = 3x^2y^2$
$f_{xx}(x,y) = 2y^3,\ f_{xy}(x,y) = 6xy^2,\ f_{yy}(x,y) = 6x^2y$ より,
$f_{xxx}(x,y) = 0,\ f_{xxy}(x,y) = f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y) = 6y^2,$
$f_{xyy}(x,y) = f_{yxy}(x,y) = f_{yyx}(x,y) = 12xy,\ f_{yyy}(x,y) = 6x^2$

(2) $f(x,y)=xy^{-1}$ から, $f_x(x,y)=y^{-1}$, $f_y(x,y)=-xy^{-2}$,
$f_{xx}(x,y)=0$, $f_{xy}(x,y)=-y^{-2}$, $f_{yy}(x,y)=2xy^{-3}$.
よって, $f_{xxx}(x,y)=0$, $f_{xxy}(x,y)=f_{xyx}(x,y)=f_{yxx}(x,y)=0$,
$f_{xyy}(x,y)=f_{yxy}(x,y)=f_{yyx}(x,y)=2y^{-3}$, $f_{yyy}(x,y)=-6xy^{-4}$

(3) $f(x,y)=y(x+y)^{-1}$ より,
$f_x(x,y)=-y(x+y)^{-2}$,
$f_y(x,y)=(x+y)^{-1}-y(x+y)^{-2}=(x+y)^{-2}(x+y-y)=x(x+y)^{-2}$,

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y)&=2y(x+y)^{-3},\\
f_{xy}(x,y)&=-(x+y)^{-2}+2y(x+y)^{-3}\\
&=(x+y)^{-3}(-x-y+2y)=(y-x)(x+y)^{-3},\\
f_{yy}&=-2x(x+y)^{-3}
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(x,y)&=-6y(x+y)^{-4}\\
f_{xxy}(x,y)&=f_{xyx}(x,y)=f_{yxx}(x,y)\\
&=2(x+y)^{-3}-6y(x+y)^{-4}\\
&=(x+y)^{-4}(2x+2y-6y)\\
&=2(x-2y)(x+y)^{-4}\\
f_{xyy}(x,y)&=f_{yxy}(x,y)=f_{yyx}(x,y)\\
&=(x+y)^{-3}-3(y-x)(x+y)^{-4}\\
&=(x+y)^{-4}(x+y-3y+3x)\\
&=2(2x-y)(x+y)^{-4}\\
f_{yyy}(x,y)&=6x(x+y)^{-4}
\end{aligned}$$

(4) $f_x(x,y)=y\cos xy$, $f_y(x,y)=x\cos xy$,
$f_{xx}(x,y)=-y^2\sin xy$, $f_{xy}(x,y)=\cos xy-xy\sin xy$, $f_{yy}(x,y)=-x^2\sin xy$ より,

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(x,y)&=-y^3\cos xy\\
f_{xxy}(x,y)&=f_{xyx}(x,y)=f_{yxx}(x,y)\\
&=-2y\sin xy-xy^2\cos xy\\
f_{xyy}(x,y)&=f_{yxy}(x,y)=f_{yyx}(x,y)\\
&=-x\sin xy-x\sin xy-x^2y\cos xy\\
&=-2x\sin xy-x^2y\cos xy\\
f_{yyy}(x,y)&=-x^3\cos xy
\end{aligned}$$

3.11.

(1) $\begin{cases} u = x^2y + x \\ v = xy \end{cases}$ とおくと，$f(u,v) = \sqrt{u} + \cos v$. よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{u}}(2xy+1) - \sin v \cdot y \\
&= \frac{2xy+1}{2\sqrt{x^2y+1}} - y\sin xy \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot x^2 - \sin v \cdot x \\
&= \frac{x^2}{2\sqrt{x^2y+1}} - x\sin xy
\end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} u = x^2 + e^{xy} \\ v = x\cos(x+y) \end{cases}$ とおくと，$f(u,v) = \dfrac{u}{v}$. よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{1}{v}(2x + ye^{xy}) - \frac{u}{v^2}\{\cos(x+y) - x\sin(x+y)\} \\
&= \frac{2x+ye^{xy}}{x\cos(x+y)} - \frac{x^2+e^{xy}}{x^2\cos^2(x+y)}\{\cos(x+y) - x\sin(x+y)\} \\
&= \frac{1}{x^2\cos^2(x+y)}\Big\{(2x+ye^{xy})x\cos(x+y) - (x^2+e^{xy})\cos(x+y) \\
&\qquad + (x^2+e^{xy})x\sin(x+y)\Big\} \\
&= \frac{x^2+(xy-1)e^{xy}}{x^2\cos(x+y)} + \frac{(x^2+e^{xy})\sin(x+y)}{x\cos^2(x+y)} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{1}{v}\cdot xe^{xy} - \frac{u}{v^2}\{-x\sin(x+y)\} \\
&= \frac{xe^{xy}}{x\cos(x+y)} - \frac{-x(x^2+e^{xy})\sin(x+y)}{x^2\cos^2(x+y)} \\
&= \frac{e^{xy}}{\cos(x+y)} + \frac{(x^2+e^{xy})\sin(x+y)}{x\cos^2(x+y)}
\end{aligned}$$

(3) $\begin{cases} u = xy - y^2 \\ v = xy \end{cases}$ とおくと，$f(u, v) = u\cos v$. よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \cos v \cdot y + (-u \sin v)y \\
&= y \cos xy - (xy^2 - y^3) \sin xy \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \cos v \cdot (x - 2y) + (-u \sin v)x \\
&= (x - 2y) \cos xy - (x^2y - xy^2) \sin xy
\end{aligned}$$

(4) $\begin{cases} u = \sqrt{x - y} \\ v = x^2y \end{cases}$ とおくと，$f(u, v) = \tan^{-1} \dfrac{v}{u}$. よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{1}{1 + (\frac{v}{u})^2} \cdot \left(-\frac{v}{u^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - y}} + \frac{1}{1 + (\frac{v}{u})^2} \cdot \frac{1}{u} \cdot 2xy \\
&= -\frac{v}{u^2 + v^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - y}} + \frac{u}{u^2 + v^2} \cdot 2xy \\
&= \frac{1}{x - y + x^4y^2} \left\{ -\frac{x^2y}{2\sqrt{x - y}} + 2xy\sqrt{x - y} \right\} \\
&= \frac{-x^2y + 4x^2y - 4xy^2}{2(x - y + x^4y^2)\sqrt{x - y}} = \frac{3x^2y - 4xy^2}{2(x - y + x^4y^2)\sqrt{x - y}} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= -\frac{v}{u^2 + v^2} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x - y}} \right) + \frac{u}{u^2 + v^2} \cdot x^2 \\
&= \frac{1}{(x - y + x^4y^2)} \left(\frac{x^2y}{2\sqrt{x - y}} + x^2\sqrt{x - y} \right) \\
&= \frac{x^2y + 2x^3 - 2x^2y}{2(x - y + x^4y^2)\sqrt{x - y}} = \frac{2x^3 - x^2y}{2(x - y + x^2y)\sqrt{x - y}}
\end{aligned}$$

3.12. $\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$ とおく.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cos\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y} \sin\theta$,

$\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{\partial z}{\partial x} \sin\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cos\theta$,

よって,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\
&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)^2 \\
&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta \\
&\qquad\qquad+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta-2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta \\
&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}
$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}=z_x\cos\theta+z_y\sin\theta$ より,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}&=\frac{\partial z_x}{\partial u}\cos\theta+\frac{\partial z_y}{\partial u}\sin\theta \\
&=\left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\sin\theta \\
&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta \\
&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

一方, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}=-z_x\sin\theta+z_y\cos\theta$ より,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}&=-\frac{\partial z_x}{\partial v}\sin\theta+\frac{\partial z_y}{\partial v}\cos\theta \\
&=-\left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\sin\theta+\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\cos\theta \\
&=-\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cos\theta\right)\sin\theta+\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos\theta\right)\cos\theta \\
&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta
\end{aligned}
$$

ゆえに,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta \\
&\quad +\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

3.13. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. このとき,

$$
\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=z_x\cos\theta+z_y\sin\theta
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial z_x}{\partial r}\cos\theta+\frac{\partial z_y}{\partial r}\sin\theta \\
&= \left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\sin\theta \\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= -z_x r\sin\theta+z_y r\cos\theta \\
&= -yz_x+xz_y
\end{aligned}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= -\left(\frac{\partial yz_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial yz_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\partial xz_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial xz_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \\
&= -\left\{-y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r\sin\theta+\left(z_x+y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)r\cos\theta\right\} \\
&\quad +\left\{-\left(z_y+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)r\sin\theta+x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r\cos\theta\right\} \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta-z_x r\cos\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}r^2\sin\theta\cos\theta \\
&\quad -z_y r\sin\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta \\
&\qquad + \frac{1}{r}\left(z_x\cos\theta + z_y\sin\theta\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta - z_x r\cos\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}r^2\sin\theta\cos\theta\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - z_y r\sin\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta\right) \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

3.14.

(1) $f_x(x,y) = 2x+3y,\ f_y(x,y) = 3x+2y.$
$f_{xx}(x,y) = 2,\ f_{xy}(x,y) = 3,\ f_{yy}(x,y) = 2$ より,

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{2x+3y}{3x+2y} \\
\varphi''(x) &= -\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)^2 - 2f_{xy}(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y) + f_{yy}(x,y)f_x(x,y)^2}{f_y(x,y)^3} \\
&= -\frac{2(3x+2y)^2 - 6(2x+3y)(3x+2y) + 2(2x+3y)^2}{(3x+2y)^3} \\
&= \frac{10(x^2+3xy+y^2)}{(3x+2y)^3} \\
&= \frac{10}{(3x+2y)^3}
\end{aligned}
$$

ここで, 最後の等号は, 陰関数 $\varphi(x)$ が $f(x,y) = x^2+3xy+y^2-1 = 0$ によって定められていることを利用した.

(2) $f_x(x,y) = 3x^2-2x,\ f_y(x,y) = 2y,$
$f_{xx}(x,y) = 6x-2,\ f_{xy}(x,y) = 0,\ f_{yy}(x,y) = 2$ より,

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{3x^2-2x}{2y} \\
\varphi''(x) &= -\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)^2 - 2f_{xy}(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y) + f_{yy}(x,y)f_x(x,y)^2}{f_y(x,y)^3} \\
&= -\frac{(6x-2)\cdot 4y^2 + 2(3x^2-2x)^2}{8y^3} \\
&= -\frac{12xy^2 - 4y^2 + 9x^4 - 12x^3 + 4x^2}{4y^3}
\end{aligned}
$$

コメント. 第 5 刷までの解答は $f(x,y)=x^3-x^2+y^2-1=0$ という関係式を利用して変形したものです。変形が複雑になっていましたので、上記解答では関係式を利用しませんでした。第 6 刷の解答は誤植です。申し訳ありません。

(3) $f_x(x,y)=y^2-2xy,\ f_y(x,y)=2xy-x^2,$
$f_{xx}(x,y)=-2y,\ f_{xy}(x,y)=2y-2x,\ f_{yy}(x,y)=2x$ より,

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{y^2-2xy}{2xy-x^2}=\frac{y^2-2xy}{x^2-2xy}$$

$$\begin{aligned}
\varphi''(x)&=-\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)^2-2f_{xy}(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y)+f_{yy}(x,y)f_x(x,y)^2}{f_y(x,y)^3}\\
&=-\frac{-2y(2xy-x^2)^2-2(2y-2x)(y^2-2xy)(2xy-x^2)+2x(y^2-2xy)^2}{(2xy-x^2)^3}\\
&=-\frac{-2yx^2(2y-x)^2-4xy(y-x)(y-2x)(2y-x)+2xy^2(y-2x)^2}{x^3(2y-x)^3}\\
&=-\frac{-2xy(2y-x)^2-4y(y-x)(y-2x)(2y-x)+2y^2(y-2x)^2}{x^2(2y-x)^3}\\
&=\frac{6y(2x^2y-2xy^2+y^3-x^3)}{x^2(2y-x)^3}\\
&=\frac{6y(-4+y^3-x^3)}{x^2(2y-x)^3}\\
&=-\frac{6y(x^3-y^3+4)}{x^2(2y-x)^3}
\end{aligned}$$

ここで, 最後から 2 番目の等号は, 陰関数 $\varphi(x)$ が $f(x,y)=xy^2-x^2y-2=0$ によって定められていることを利用した.

(4) $f_x(x,y)=2x+y,\ f_y(x,y)=x-2y,$
$f_{xx}(x,y)=2,\ f_{xy}(x,y)=1,\ f_{yy}(x,y)=-2$ より,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x)&=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{2x+y}{x-2y}\\
\varphi''(x)&=-\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)^2-2f_{xy}(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y)+f_{yy}(x,y)f_x(x,y)^2}{f_y(x,y)^3}\\
&=-\frac{2(x-2y)^2-2(2x+y)(x-2y)-2(2x+y)^2}{(x-2y)^3}\\
&=-\frac{2(-5x^2+5y^2-5xy)}{(x-2y)^3}\\
&=\frac{10}{(x-2y)^3}
\end{aligned}$$

ここで, 最後の等号は, 陰関数 $\varphi(x)$ が $f(x,y)=x^2+xy-y^2-1=0$ によって定められていることを利用した.

(5) $f_x(x,y) = e^x - e^{x+y}$, $f_y(x,y) = -e^{x+y} + e^y$,
$f_{xx}(x,y) = e^x - e^{x+y}$, $f_{xy}(x,y) = -e^{x+y}$, $f_{yy}(x,y) = -e^{x+y} + e^y$ より,

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{e^x - e^{x+y}}{-e^{x+y} + e^y} = -\frac{-e^y}{-e^x} = -e^{y-x} \quad (*)$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= -\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)^2 - 2f_{xy}(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y) + f_{yy}(x,y)f_x(x,y)^2}{f_y(x,y)^3} \\ &= -\frac{(e^x - e^{x+y})(-e^{x+y} + e^y)^2 + 2e^{x+y}(e^x - e^{x+y})(-e^{x+y} + e^y) + (-e^{x+y} + e^y)(e^x - e^{x+y})^2}{(-e^{x+y} + e^y)^3} \\ &= -\frac{(e^x - e^{x+y})(-e^{x+y} + e^y)(-e^{x+y} + e^y + 2e^{x+y} + e^x - e^{x+y})}{(-e^{x+y} + e^y)^3} \\ &= -\frac{(e^x - e^{x+y})(e^x + e^y)}{(-e^{x+y} + e^y)^2} \\ &= -\frac{-e^y \cdot e^{x+y}}{(-e^x)^2} = e^{2y-x} \qquad (*)\end{aligned}$$

ここで, $(*)$ の等号は, 陰関数 $\varphi(x)$ が $f(x,y) = e^x - e^{x+y} + e^y = 0$ によって定められていることを利用した.
コメント. 第5刷までの解答は正しいが、上記解答ではより簡単な形に変形をした。第6刷では $\varphi'(x)$ が誤植です。申し訳ありません。

3.15.

(1) $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 2y$, $f_{xx}(x,y) = 2$ である. 連立方程式

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ f_x(x,y) = 2x = 0 \end{cases}$$

を解くと, $(x,y) = (0,\pm 1)$. ここで, $f_y(0,\pm 1) = \pm 2 \neq 0$ (複号同順) である. また, $\dfrac{f_{xx}(0,\pm 1)}{f_y(0,\pm 1)} = \pm 1$ (複号同順) より, $x = 0$ のとき, 極大で, 極大値は $y = 1$, $x = 0$ のとき, 極小で, 極小値は $y = -1$ である.

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{1}{2}x$, $f_y(x,y) = 2y$, $f_{xx}(x,y) = \dfrac{1}{2}$ である. 連立方程式

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ f_x(x,y) = \frac{1}{2}x = 0 \end{cases}$$

を解くと, $(x,y) = (0,\pm 1)$. ここで, $f_y(0,\pm 1) = \pm 2 \neq 0$ (複号同順) である. また, $\dfrac{f_{xx}(0,\pm 1)}{f_y(0,\pm 1)} = \pm\dfrac{1}{4}$ (複号同順) より, $x = 0$ のとき, 極大で, 極大値は $y = 1$, $x = 0$ のとき, 極小で, 極小値は $y = -1$ である.

(3) $f_x(x,y) = 2x - y$, $f_y(x,y) = -x + 2y$, $f_{xx}(x,y) = 2$ である. 連立方程式

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{a}) \\ f_x(x,y) = 2x - y = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{b}) \end{cases}$$

を解こう．(b) 式より, $y=2x$ を得る．これを (a) 式に代入すると, $3x^2=1$ を得る．よって $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. また, $y=2x$ から, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (複号同順) を得る．ここで, $f_y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=\pm\sqrt{3}\neq 0$ (複号同順) である．また, $\dfrac{f_{xx}(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{2}{\sqrt{3}})}{f_y(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{2}{\sqrt{3}})}=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ (複号同順) より, $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 極大で, 極大値は $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 極小で, 極小値は $y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である．

(4) $f_x(x,y)=3x^2-3y$, $f_y(x,y)=-3x+3y^2$, $f_{xx}(x,y)=6x$ である．連立方程式

$$\begin{cases} f(x,y)=x^3-3xy+y^3=0 & \cdots\cdots\text{(a)} \\ f_x(x,y)=3x^2-3y=0 & \cdots\cdots\text{(b)} \end{cases}$$

を解こう．(b) 式より $y=x^2$. これを (a) 式に代入すると, $x^3(x^3-2)=0$ を得る．これより $x=0,\sqrt[3]{2}$. また, $y=x^2$ から $(x,y)=(0,0),(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ を得る．ここで, $f_y(0,0)=0$ より $x=0$ では極値をとらない．また,

$$\begin{aligned} f_y(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}) &= -3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{16} \\ &= -3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=-3\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}\neq 0 \end{aligned}$$

である．$\dfrac{f_{xx}(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})}{f_y(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})}=2>0$ より, $x=\sqrt[3]{2}$ のとき極大で, 極大値は $y=\sqrt[3]{4}$ である．

3.16.

(1) $f_x(x,y)=2x+y$, $f_y(x,y)=x+4y-4$,
$f_{xx}(x,y)=2$, $f_{xy}(x,y)=1$, $f_{yy}(x,y)=4$ である．
ここで, $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=7$ とおく．
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x+y=0 \\ f_y(x,y)=x+4y-4=0 \end{cases}$$

を解くと, $(x,y)=\left(-\dfrac{4}{7},\dfrac{8}{7}\right)$ を得る．このとき,

$$H\left(-\frac{4}{7},\frac{8}{7}\right)=7,\quad f_{xx}\left(-\frac{4}{7},\frac{8}{7}\right)=2>0$$

である．よって, $(x,y)=\left(-\dfrac{4}{7},\dfrac{8}{7}\right)$ のとき極小で, 極小値は $f\left(-\dfrac{4}{7},\dfrac{8}{7}\right)=-\dfrac{16}{7}$ である．

(2) $f_x(x,y)=3x^2+2y-1$, $f_y(x,y)=2x-2$,
$f_{xx}(x,y)=6x$, $f_{xy}(x,y)=2$, $f_{yy}(x,y)=0$ である．
ここで, $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=-4<0$ となるので, $f(x,y)$ は極値を持たない．

(3) $f_x(x,y) = 3x^2 + 2x - 1,\ f_y(x,y) = 3y^2 + 2y - 1,$
$f_{xx}(x,y) = 6x + 2,\ f_{xy}(x,y) = 0,\ f_{yy}(x,y) = 6y + 2$ である.
ここで, $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 4(3x+1)(3y+1)$ とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 & \cdots\cdots\text{(a)} \\ f_y(x,y) = 3y^2 + 2y - 1 = 0 & \cdots\cdots\text{(b)} \end{cases}$$

を解こう. (a) 式から $(3x-1)(x+1) = 0$. よって, $x = \dfrac{1}{3}, -1$ を得る. (b) 式から $(3y-1)(y+1) = 0$. よって, $y = \dfrac{1}{3}, -1$ を得る. これより, 連立方程式の解は $(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right), \left(-1, \dfrac{1}{3}\right), \left(\dfrac{1}{3}, -1\right), (-1,-1)$ となる.

$(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ のとき,

$$H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 16 > 0, \quad f_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 4 > 0$$

より, $(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ のとき極小で, 極小値は $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{44}{27}$ である.

$(x,y) = \left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$ のとき,

$$H\left(-1, \frac{1}{3}\right) = -16 < 0$$

より, $(x,y) = \left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$ のときは極値を持たない.

$(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, -1\right)$ のとき,

$$H\left(\frac{1}{3}, -1\right) = -16 < 0$$

より, $(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, -1\right)$ のときは極値を持たない.

$(x,y) = (-1,-1)$ のとき,

$$H(-1,-1) = 16 > 0, \quad f_{xx}(-1,-1) = -4 < 0$$

より, $(x,y) = (-1,-1)$ のとき極大で, 極大値は $f(-1,-1) = 4$ である.

(4) $f_x(x,y) = 2x - y - 2,\ f_y(x,y) = -x + 2y + 3,$
$f_{xx}(x,y) = 2,\ f_{xy}(x,y) = -1,\ f_{yy}(x,y) = 2$ である.
ここで, $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 3 > 0$ とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - y - 2 = 0 \\ f_y(x,y) = -x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

を解くと, $(x,y)=\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ を得る.

$$H\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)=3>0,\quad f_{xx}\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)=2>0$$

より, $(x,y)=\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ のとき極小で, 極小値は $f\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}$ である.

(5) $f_x(x,y)=3x^2-6y$, $f_y(x,y)=-6x+3y^2$,
$f_{xx}(x,y)=6x$, $f_{xy}(x,y)=-6$, $f_{yy}(x,y)=6y$ である.
ここで, $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=36(xy-1)$ とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-6y=0 & \cdots\cdots(\mathrm{a}) \\ f_y(x,y)=-6x+3y^2=0 & \cdots\cdots(\mathrm{b}) \end{cases}$$

を解こう. (a) 式より $y=\frac{1}{2}x^2$. これを (b) 式に代入すると, $x(x^3-8)=0$ を得る. よって $x=0,2$. $y=\frac{1}{2}x^2$ であるので, 連立方程式の解は $(x,y)=(0,0),(2,2)$ である.
$(x,y)=(0,0)$ のとき, $H(0,0)=-36<0$ より, 極値をとらない.
$(x,y)=(2,2)$ のとき,

$$H(2,2)=108>0,\quad f_{xx}(2,2)=12>0$$

より, $(x,y)=(2,2)$ のとき極小で, 極小値は $f(2,2)=-8$ である.

(6) $f_x(x,y)=3x^2y+y^3-y$, $f_y(x,y)=x^3+3xy^2-x$,
$f_{xx}(x,y)=6xy$, $f_{xy}(x,y)=3x^2+3y^2-1$, $f_{yy}(x,y)=6xy$ である.
ここで,

$$\begin{aligned} H(x,y)&=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2 \\ &=-9x^4-9y^4+18x^2y^2+6x^2+6y^2-1 \end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2y+y^3-y=0 & \cdots\cdots(\mathrm{a}) \\ f_y(x,y)=x^3+3xy^2-x=0 & \cdots\cdots(\mathrm{b}) \end{cases}$$

を解こう. (a) 式より $y(3x^2+y^2-1)=0$. よって, $y=0$ または $3x^2+y^2=1$ を得る. また, (b) 式より $x(x^2+3y^2-1)=0$. よって, $x=0$ または $x^2+3y^2=1$ を得る. これより, この連立方程式の解は, 次の 4 通りの場合が考えられる.
(a) $y=0$ かつ $x=0$
(b) $y=0$ かつ $x^2+3y^2=1$
(c) $x=0$ かつ $3x^2+y^2=1$
(d) $x^2+3y^2=1$ かつ $3x^2+y^2=1$

上記において, 最初の 3 番目までの場合から,

$$(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

を得る. 次に, 4 番目の場合について調べよう. 最初に,

$$3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2$$

から $x^2 = y^2$ を得る. これを $3x^2 + y^2 = 1$ に代入すると, $4x^2 = 1$. よって, $x = \pm\dfrac{1}{2}$, $y = \pm\dfrac{1}{2}$ を得る. したがって, この連立方程式の解は,

$$(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

となる.

$(x, y) = (0, 0)$ のとき. $H(0, 0) = -1 < 0$ となり, 極値をとらない.

$(x, y) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ のとき. $H(\pm 1, 0) = H(0, \pm 1) = -4 < 0$ となり, 極値をとらない.

$(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順) のとき.

$$H\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = 2 > 0, \quad f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0$$

よって, $(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順) のとき極小で, 極小値は $f\left(\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{8}$ である.

$(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{2}, \mp\dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順) のとき.

$$H\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = 2 > 0, \quad f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0$$

よって, $(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{2}, \mp\dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順) のとき極大で, 極大値は $f\left(\pm\dfrac{1}{2}, \mp\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8}$ である.

(7) $f_x(x, y) = 2xy - y^2 - 1$, $f_y(x, y) = x^2 - 2xy + 1$,
$f_{xx}(x, y) = 2y$, $f_{xy}(x, y) = 2x - 2y$, $f_{yy}(x, y) = -2x$ である.
ここで, $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = -4(x^2 - xy + y^2)$ とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xy - y^2 - 1 = 0 & \cdots\cdots \text{(a)} \\ f_y(x, y) = x^2 - 2xy + 1 = 0 & \cdots\cdots \text{(b)} \end{cases}$$

を解こう. (a)+(b) より $x^2 - y^2 = 0$. よって, $y = \pm x$ を得る. これを (a) 式に代入する. $y = x$ のとき, $x^2 = 1$ から $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ (複号同順) を得る. 一方, $y = -x$ のときは $-3x^2 = 1$ となり, 解は存在しない. よって, この連立方程式の解は $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ (複号同順) である. このとき, $H(\pm 1, \pm 1) = -4 < 0$ となる. ゆえに, $f(x, y)$ は極値を持たない.

(8) $f_x(x,y)=2xy^2-2x,\ f_y(x,y)=2x^2y-2y,$
$f_{xx}(x,y)=2y^2-2,\ f_{xy}(x,y)=4xy,\ f_{yy}(x,y)=2x^2-2$ である.
ここで, $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=4(x^2-1)(y^2-1)-16x^2y^2$ とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2xy^2-2x=0 & \cdots\cdots(\mathrm{a}) \\ f_y(x,y)=2x^2y-2y=0 & \cdots\cdots(\mathrm{b}) \end{cases}$$

を解こう. (a) 式より, $2x(y^2-1)=0$. よって, $x=0$ または $y=\pm1$ を得る. また, (b) 式より, $2y(x^2-1)=0$. よって, $y=0$ または $x=\pm1$ を得る. よって, この連立方程式の解は, $(x,y)=(0,0),(\pm1,\pm1),(\pm1,\mp1)$ （複号同順）である.

$(x,y)=(0,0)$ のとき.

$$H(0,0)=4>0,\quad f_{xx}(0,0)=-2<0$$

よって, $(x,y)=(0,0)$ のとき極大で, 極大値は $f(0,0)=1$ である.

$(x,y)=(\pm1,\pm1),(\pm1,\mp1)$ (複号同順） のとき.

$$H(\pm1,\pm1)=H(\pm1,\mp1)=-16<0$$

となり極値をとらない.

3.17.

(1) $L(x,y,t)=f(x,y)-tg(x,y)=x+y-t(x^2+y^2-1)$ とおく.
$g_x(x,y)=2x,\ g_y(x,y)=2y,$
$L_x(x,y,t)=1-2tx,\ L_y(x,y,t)=1-2ty,\ L_t(x,y,t)=-(x^2+y^2-1),$
$L_{xx}(x,y,t)=-2t,\ L_{xy}(x,y,t)=0,\ L_{yy}(x,y,t)=-2t$ である.
ここで,

$$\begin{aligned} H(x,y,t) &= L_{xx}(x,y,t)g_y(x,y)^2-2L_{xy}(x,y,t)g_x(x,y)g_y(x,y) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + L_{yy}(x,y,t)g_x(x,y)^2 \\ &= -8t(x^2+y^2) \end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} L_x(x,y,t)=1-2tx=0 & \cdots\cdots(\mathrm{a}) \\ L_y(x,y,t)=1-2ty=0 & \cdots\cdots(\mathrm{b}) \\ L_t(x,y,t)=-(x^2+y^2-1)=0 & \cdots\cdots(\mathrm{c}) \end{cases}$$

を解こう. (a), (b) 式より $x=y=\dfrac{1}{2t}$ を得る. これを (c) 式に代入すると, $2t^2=1$. よって $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る. $x=y=\dfrac{1}{2t}$ であったので, この連立方程式の解は, $(x,y,t)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) である. ここで,

$$H\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mp\frac{8}{\sqrt{2}}\quad(\text{複号同順})$$

よって, $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ という条件の下で極大で, 極大値は $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$ である.

また, $(x,y)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ という条件の下で極小で, 極小値は $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}$ である.

(2) $L(x,y,t)=f(x,y)-tg(x,y)=xy-t(x^2+y^2-1)$ とおく.
$g_x(x,y)=2x$, $g_y(x,y)=2y$,
$L_x(x,y,t)=y-2tx$, $L_y(x,y,t)=x-2ty$, $L_t(x,y,t)=-(x^2+y^2-1)$,
$L_{xx}(x,y,t)=-2t$, $L_{xy}(x,y,t)=1$, $L_{yy}(x,y,t)=-2t$ である.
ここで,

$$\begin{aligned}H(x,y,t)&=L_{xx}(x,y,t)g_y(x,y)^2-2L_{xy}(x,y,t)g_x(x,y)g_y(x,y)\\&\qquad\qquad\qquad\qquad+L_{yy}(x,y,t)g_x(x,y)^2\\&=-8(ty^2+xy+tx^2)\end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases}L_x(x,y,t)=y-2tx=0 & \cdots\cdots(\mathrm{a})\\ L_y(x,y,t)=x-2ty=0 & \cdots\cdots(\mathrm{b})\\ L_t(x,y,t)=-(x^2+y^2-1)=0 & \cdots\cdots(\mathrm{c})\end{cases}$$

を解こう. (a) 式より $y=2tx$. これを (b) 式に代入すると $x(1-4t^2)=0$. よって, $x=0$ または $t=\pm\dfrac{1}{2}$ を得る.

ところが, $x=0$ のとき $y=2tx$ から $y=0$ となり, これは (c) を満たさないので不適. よって $t=\pm\dfrac{1}{2}$ である.

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき. $y=2tx$ であったので, これより $y=x$ を得る. これを (c) 式に代入すると $2x^2=1$. よって $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順）を得る.

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき. $y=2tx$ であったので, これより $y=-x$ を得る. これを (c) 式に代入すると $2x^2=1$. よって $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順）を得る. よって, この連立方程式の解は

$$(x,y,t)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)\quad(\text{複号同順})$$

である.

$(x,y,t)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right)$ のとき.

$$H\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)=-8<0$$

よって, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ という条件の下で極大で, 極大値は $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}$ である.

また, $(x,y,t)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順) のとき.

$$H\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)=8>0$$

よって, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ という条件の下で極小で, 極小値は $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{2}$ である.

(3) $g_x(x,y)=y$, $g_y(x,y)=x$ である.
$L(x,y,t)=f(x,y)-tg(x,y)=x^2+y^2-t(xy-1)$ とおく.
$L_x(x,y,t)=2x-ty$, $L_y(x,y,t)=2y-tx$, $L_t(x,y,t)=-(xy-1)$,
$L_{xx}(x,y,t)=2$, $L_{xy}(x,y,t)=-t$, $L_{yy}(x,y,t)=2$ である.
ここで,

$$\begin{aligned}H(x,y,t)&=L_{xx}(x,y,t)g_y(x,y)^2-2L_{xy}(x,y,t)g_x(x,y)g_y(x,y)\\&\qquad\qquad+L_{yy}(x,y,t)g_x(x,y)^2\\&=2x^2+2txy+2y^2\end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases}L_x(x,y,t)=2x-ty=0 & \cdots\cdots(\mathrm{a})\\ L_y(x,y,t)=2y-tx=0 & \cdots\cdots(\mathrm{b})\\ L_t(x,y,t)=-(xy-1)=0 & \cdots\cdots(\mathrm{c})\end{cases}$$

を解こう. (a) 式より $x=\dfrac{t}{2}y$ を得る. これを (b) 式に代入すると, $y(4-t^2)=0$ となり, $y=0$ または $t=\pm2$ を得る. ところが, $y=0$ は (c) 式を満たさないので不適. よって $t=\pm2$ である.

$t=2$ のとき, $x=\dfrac{t}{2}y$ から $x=y$ を得る. これを (c) 式に代入すると $y^2=1$ となり, $(x,y,t)=(\pm1,\pm1,2)$ (複号同順) を得る.

$t=-2$ のとき, $x=\dfrac{t}{2}y$ から $x=-y$ を得る. これを (c) 式に代入すると $-y^2=1$ となり不適.

ここで, $H(\pm 1, \pm 1, 2) = 8 > 0$ より, $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ (複号同順) のとき, $f(x, y)$ は $g(x, y) = xy - 1 = 0$ という条件の下で極小で, 極小値は $f(\pm 1, \pm 1) = 2$ である.

(4) $g_x(x, y) = 2x$, $g_y(x, y) = 2y$ である.
$L(x, y, t) = f(x, y) - tg(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2 - t(x^2 + y^2 - 1)$ とおく.
$L_x(x, y, t) = 8x + 4y - 2tx$, $L_y(x, y, t) = 4x + 2y - 2ty$,
$L_t(x, y, t) = -(x^2 + y^2 - 1)$,
$L_{xx}(x, y, t) = 8 - 2t$, $L_{xy}(x, y, t) = 4$, $L_{yy}(x, y, t) = 2 - 2t$ である.
ここで,

$$\begin{aligned} H(x, y, t) &= L_{xx}(x, y, t)g_y(x, y)^2 - 2L_{xy}(x, y, t)g_x(x, y)g_y(x, y) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + L_{yy}(x, y, t)g_x(x, y)^2 \\ &= 8\{(4 - t)y^2 - 4xy + (1 - t)x^2\} \end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases} L_x(x, y, t) = 8x + 4y - 2tx = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{a}) \\ L_y(x, y, t) = 4x + 2y - 2ty = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{b}) \\ L_t(x, y, t) = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 & \cdots\cdots(\mathrm{c}) \end{cases}$$

を解こう. (a) 式より $y = -\dfrac{1}{2}(4 - t)x$ を得る. これを (b) 式に代入すると, $xt(t - 5) = 0$ となり, $x = 0$ または $t = 0, 5$ を得る. ところが, $x = 0$ とのき, $y = -\dfrac{1}{2}(4 - t)x$ から $y = 0$ を得るが, これは (c) 式を満たさないので不適. よって $t = 0, 5$ である.
$t = 0$ のとき, $y = -\dfrac{1}{2}(4 - t)x$ から $y = -2x$ を得る. これを (c) 式に代入すると $5x^2 = 1$ となり, $(x, y, t) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ (複号同順) を得る.
$t = 5$ のとき, $y = -\dfrac{1}{2}(4 - t)x$ から $y = \dfrac{1}{2}x$ を得る. これを (c) 式に代入すると $\dfrac{5}{4}x^2 = 1$ となり, $(x, y, t) = \left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, 5\right)$ (複号同順) を得る.
ここで, $H\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) = 40 > 0$ より, $(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (複号同順) のとき, $f(x, y)$ は $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ という条件の下で極小で, 極小値は $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$ である.
また, $H\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, 5\right) = -40 < 0$ より, $(x, y) = \left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (複号同順) のとき, $f(x, y)$ は $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ という条件の下で極大で, 極大値は $f\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 5$ である.

(5) $g_x(x,y)=2x+y$, $g_y(x,y)=x+2y$ である.
$L(x,y,t)=f(x,y)-tg(x,y)=xy-t(x^2+xy+y^2-1)$ とおく.
$L_x(x,y,t)=y-2tx-ty$, $L_y(x,y,t)=x-tx-2ty$,
$L_t(x,y,t)=-(x^2+xy+y^2-1)$,
$L_{xx}(x,y,t)=-2t$, $L_{xy}(x,y,t)=1-t$, $L_{yy}(x,y,t)=-2t$ である.
ここで,

$$\begin{aligned}H(x,y,t)&=L_{xx}(x,y,t)g_y(x,y)^2-2L_{xy}(x,y,t)g_x(x,y)g_y(x,y)\\&\qquad+L_{yy}(x,y,t)g_x(x,y)^2\\&=-2t(x+2y)^2-2(1-t)(2x+y)(x+2y)-2t(2x+y)^2\end{aligned}$$

とおく.
連立方程式

$$\begin{cases}L_x(x,y,t)=y-2tx-ty=0 & \cdots\cdots(\mathrm{a})\\L_y(x,y,t)=x-tx-2ty=0 & \cdots\cdots(\mathrm{b})\\L_t(x,y,t)=-(x^2+xy+y^2-1)=0 & \cdots\cdots(\mathrm{c})\end{cases}$$

を解こう. 最初に, $t=0$ ならば, (a), (b) 式から $x=y=0$ となり, (c) 式を満たさないので $t\neq 0$ である. (a) 式より $x=\dfrac{1-t}{2t}y$ を得る. これを (b) 式に代入すると, $y(t+1)(3t-1)=0$ となり, $y=0$ または $t=-1,\dfrac{1}{3}$ を得る. ところが, $y=0$ とのき, $x=\dfrac{1-t}{2t}y$ から $x=0$ を得るが, これは (c) 式を満たさないので不適. よって $t=-1,\dfrac{1}{3}$ である.
$t=-1$ のとき, $x=\dfrac{1-t}{2t}y$ から $x=-y$ を得る. これを (c) 式に代入すると $y^2=1$ となり, $(x,y,t)=(\pm1,\mp1,-1)$ (複号同順) を得る.
$t=\dfrac{1}{3}$ のとき, $x=\dfrac{1-t}{2t}y$ から $x=y$ を得る. これを (c) 式に代入すると $3y^2=1$ となり, $(x,y,t)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{3}\right)$ (複号同順) を得る.
ここで, $H\left(\pm1,\mp1,-1\right)=8>0$ より, $(x,y)=(\pm1,\mp1)$ (複号同順) のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+xy+y^2-1=0$ という条件の下で極小で, 極小値は $f\left(\pm1,\mp1\right)=-1$ である.
また, $H\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{3}\right)=-8<0$ より, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (複号同順) のとき, $f(x,y)$ は $g(x,y)=x^2+xy+y^2-1=0$ という条件の下で極大で, 極大値は $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{3}$ である.

3.18.

(1) $f_x(x,y)=e^{x-y}$, $f_y(x,y)=-e^{x-y}$,
$f_{xx}(x,y)=e^{x-y}$, $f_{xy}(x,y)=-e^{x-y}$, $f_{yy}(x,y)=e^{x-y}$,
$f_{xxx}(x,y)=e^{x-y}$, $f_{xxy}(x,y)=-e^{x-y}$, $f_{xyy}(x,y)=e^{x-y}$, $f_{yyy}(x,y)=-e^{x-y}$

である．よって，$f(x,y)=e^{x-y}$ の $(x,y)=(1,1)$ における 3 次までのテイラー展開は，

$$
\begin{aligned}
&f(1,1)+\{f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)\}\\
&\qquad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right\}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(1,1)(x-1)^3+3f_{xxy}(1,1)(x-1)^2(y-1)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(1,1)(x-1)(y-1)^2+f_{yyy}(1,1)(y-1)^3\right\}\\
&=1+\{(x-1)-(y-1)\}+\frac{1}{2}\left\{(x-1)^2-2(x-1)(y-1)+(y-1)^2\right\}\\
&\qquad\qquad\frac{1}{6}\left\{(x-1)^3-3(x-1)^2(y-1)+3(x-1)(y-1)^2-(y-1)^3\right\}
\end{aligned}
$$

なお，最後の結果は展開して整理をしない（以下，(4)，(5) 以外の問題も同様）．

(2) $f_x(x,y)=2\cos(2x-y)$, $f_y(x,y)=-\cos(2x-y)$, $f_{xx}(x,y)=-4\sin(2x-y)$, $f_{xy}(x,y)=2\sin(2x-y)$, $f_{yy}(x,y)=-\sin(2x-y)$, $f_{xxx}(x,y)=-8\cos(2x-y)$, $f_{xxy}(x,y)=4\cos(2x-y)$, $f_{xyy}(x,y)=-2\cos(2x-y)$, $f_{yyy}(x,y)=\cos(2x-y)$ である．よって，$f(x,y)=\sin(2x-y)$ の $(x,y)=(1,2)$ における 3 次までのテイラー展開は，

$$
\begin{aligned}
&f(1,2)+\{f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)\}\\
&\qquad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(1,2)(x-1)^2+2f_{xy}(1,2)(x-1)(y-2)+f_{yy}(1,2)(y-2)^2\right\}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(1,2)(x-1)^3+3f_{xxy}(1,2)(x-1)^2(y-2)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(1,2)(x-1)(y-2)^2+f_{yyy}(1,2)(y-2)^3\right\}\\
&=\{2(x-1)-(y-2)\}\\
&\qquad-\frac{1}{6}\left\{8(x-1)^3-12(x-1)^2(y-2)+6(x-1)(y-2)^2-(y-2)^3\right\}
\end{aligned}
$$

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}=(x-y)^{-1}$ より，
$f_x(x,y)=-(x-y)^{-2}$, $f_y(x,y)=(x-y)^{-2}$,
$f_{xx}(x,y)=2(x-y)^{-3}$, $f_{xy}(x,y)=-2(x-y)^{-3}$, $f_{yy}(x,y)=2(x-y)^{-3}$,
$f_{xxx}(x,y)=-6(x-y)^{-4}$, $f_{xxy}(x,y)=6(x-y)^{-4}$, $f_{xyy}(x,y)=-6(x-y)^{-4}$,
$f_{yyy}(x,y)=6(x-y)^{-4}$ である．よって，$f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ の $(x,y)=(1,0)$ に

おける 3 次までのテイラー展開は,

$$\begin{aligned}
&f(1,0)+\{f_x(1,0)(x-1)+f_y(1,0)y\}\\
&\qquad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(1,0)(x-1)^2+2f_{xy}(1,0)(x-1)y+f_{yy}(1,0)y^2\right\}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(1,0)(x-1)^3+3f_{xxy}(1,0)(x-1)^2y\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(1,0)(x-1)y^2+f_{yyy}(1,0)y^3\right\}\\
&=1-\{(x-1)-y\}+\{(x-1)^2-2(x-1)y+y^2\}\\
&\qquad\qquad-\left\{(x-1)^3-3(x-1)^2y+3(x-1)y^2-y^3\right\}
\end{aligned}$$

(4) $f_x(x,y)=e^x\log(1+y)$, $f_y(x,y)=e^x(1+y)^{-1}$,
$f_{xx}(x,y)=e^x\log(1+y)$, $f_{xy}(x,y)=e^x(1+y)^{-1}$, $f_{yy}(x,y)=-e^x(1+y)^{-2}$,
$f_{xxx}(x,y)=e^x\log(1+y)$, $f_{xxy}(x,y)=e^x(1+y)^{-1}$, $f_{xyy}(x,y)=-e^x(1+y)^{-2}$,
$f_{yyy}(x,y)=2e^x(1+y)^{-3}$ である．よって, $f(x,y)=e^x\log(1+y)$ の $(x,y)=(0,0)$ における 3 次までのテイラー展開は,

$$\begin{aligned}
&f(0,0)+\{f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\}\\
&\qquad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right\}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(0,0)x^3+3f_{xxy}(0,0)x^2y\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(0,0)xy^2+f_{yyy}(0,0)y^3\right\}\\
&=y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)+\frac{1}{6}(3x^2y-3xy^2+2y^3)
\end{aligned}$$

e^x と $\log(1+y)$ のマクローリン展開を別々に求めて, それらを掛け合わせて 3 次の項まで展開しても良い.

(5) $f_x(x,y)=-e^y\sin x$, $f_y(x,y)=e^y\cos x$,
$f_{xx}(x,y)=-e^y\cos x$, $f_{xy}(x,y)=-e^y\sin x$, $f_{yy}(x,y)=e^y\cos x$,
$f_{xxx}(x,y)=e^y\sin x$, $f_{xxy}(x,y)=-e^y\cos x$, $f_{xyy}(x,y)=-e^y\sin x$, $f_{yyy}(x,y)=e^y\cos x$ である．よって, $f(x,y)=e^y\cos x$ の $(x,y)=(0,0)$ における 3 次までのテイラー展開は,

$$\begin{aligned}
&f(0,0)+\{f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\}\\
&\qquad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right\}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(0,0)x^3+3f_{xxy}(0,0)x^2y\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(0,0)xy^2+f_{yyy}(0,0)y^3\right\}\\
&=1+y-\frac{1}{2}(x^2-y^2)-\frac{1}{6}(3x^2y-y^3)
\end{aligned}$$

$\cos x$ と e^y のマクローリン展開を別々に求めて, それらを掛け合わせて 3 次の項まで展開しても良い.

(6) $f(x,y)=\sqrt{x+2y}=(x+2y)^{\frac{1}{2}}$ より,
$f_x(x,y)=\dfrac{1}{2}(x+2y)^{-\frac{1}{2}}$, $f_y(x,y)=(x+2y)^{-\frac{1}{2}}$,
$f_{xx}(x,y)=-\dfrac{1}{4}(x+2y)^{-\frac{3}{2}}$, $f_{xy}(x,y)=-\dfrac{1}{2}(x+2y)^{-\frac{3}{2}}$,
$f_{yy}(x,y)=-(x+2y)^{-\frac{3}{2}}$,
$f_{xxx}(x,y)=\dfrac{3}{8}(x+2y)^{-\frac{5}{2}}$, $f_{xxy}(x,y)=\dfrac{3}{4}(x+2y)^{-\frac{5}{2}}$,
$f_{xyy}(x,y)=\dfrac{3}{2}(x+2y)^{-\frac{5}{2}}$, $f_{yyy}(x,y)=3(x+2y)^{-\frac{5}{2}}$ である．よって, $f(x,y)=\sqrt{x+2y}$ の $(x,y)=(3,-1)$ における 3 次までのテイラー展開は,

$$
\begin{aligned}
&f(3,-1)+\{f_x(3,-1)(x-3)+f_y(3,-1)(y+1)\}\\
&\quad+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(3,-1)(x-3)^2+2f_{xy}(3,-1)(x-3)(y+1)+f_{yy}(3,-1)(y+1)^2\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{3!}\left\{f_{xxx}(3,-1)(x-3)^3+3f_{xxy}(3,-1)(x-3)^2(y+1)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+3f_{xyy}(3,-1)(x-3)(y+1)^2+f_{yyy}(3,-1)(y+1)^3\right\}\\
&=1+\frac{1}{2}\{(x-3)+2(y+1)\}-\frac{1}{8}\{(x-3)^2+4(x-3)(y+1)+4(y+1)^2\}\\
&\qquad+\frac{1}{48}\{3(x-3)^3+18(x-3)^2(y+1)+36(x-3)(y+1)^2+24(y+1)^3\}\\
&=1+\frac{1}{2}\{(x-3)+2(y+1)\}-\frac{1}{8}\{(x-3)^2+4(x-3)(y+1)+4(y+1)^2\}\\
&\qquad+\frac{1}{16}\{(x-3)^3+6(x-3)^2(y+1)+12(x-3)(y+1)^2+8(y+1)^3\}
\end{aligned}
$$