例題と演習で学ぶ　微分積分学　演習問題解答
(第 6 刷にも対応)

第 1 章

1.1.

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ とおくと, $f(-2) = 0$ より, $f(x)$ は $x + 2$ で割り切れる. $f(x)$ を $x + 2$ で割ることで,

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x^2 + x + 3)$$

を得る.

(2) $f(x) = x^3 - 19x - 30$ とおくと, $f(-2) = 0$ より, $f(x)$ は $x + 2$ で割り切れる. $f(x)$ を $x + 2$ で割ることで,

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x^2 - 2x - 15)$$

を得る. これは, さらに次のように因数分解ができる.

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x^2 - 2x - 15) = (x + 2)(x + 3)(x - 5)$$

(3) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

1.2.

(1) $(x^2 + 3x - 1) \div (x + 1) = x + 2$ 余り -3 より,

$$x^2 + 3x - 1 = (x + 1)(x + 2) - 3$$

両辺を $\dfrac{1}{x + 1}$ 倍すると

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} = x + 2 - \frac{3}{x + 1}$$

(2) $(x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 2) \div (x^2 + x + 1) = x^2 + x - 1$ 余り $-5x + 3$ より,

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) - 5x + 3$$

両辺を $\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ 倍すると

$$\frac{x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 2}{x^2 + x + 1} = x^2 + x - 1 - \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$$

(3) $(3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 2) \div (2x^2 - 1) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{4}$ 余り $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ より,

$$3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 2 = (2x^2 - 1)\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

両辺を $\dfrac{1}{2x^2 - 1}$ 倍すると,

$$\frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 2}{2x^2 - 1} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} + \frac{2x - 1}{8x^2 - 4}$$

1.3.

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$ とおいて, a, b を求めればよい. この式の両辺を $x(x-1)$ 倍すると次を得る.

$$1 = a(x-1) + bx$$

ここで, $x = 0$ を代入すると $a = -1$, $x = 1$ を代入すると $b = 1$ を得る. よって,

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

(2) $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2}$ とおいて, a, b を求めればよい. この式の両辺を $(x+1)(x-2)$ 倍すると次を得る.

$$3x - 1 = a(x-2) + b(x+1)$$

ここで, $x = -1$ を代入すると $a = \dfrac{4}{3}$, $x = 2$ を代入すると $b = \dfrac{5}{3}$ を得る. よって,

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{4}{3(x+1)} + \frac{5}{3(x-2)}$$

(3) $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x-3}$ とおいて, a, b, c を求めればよい. この式の両辺を $(x+1)(x-2)(x-3)$ 倍すると次を得る.

$$2x + 3 = a(x-2)(x-3) + b(x+1)(x-3) + c(x+1)(x-2)$$

ここで, $x = -1$ を代入すると $a = \dfrac{1}{12}$, $x = 2$ を代入すると $b = -\dfrac{7}{3}$, $x = 3$ を代入すると $c = \dfrac{9}{4}$ を得る. よって,

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{12(x+1)} - \frac{7}{3(x-2)} + \frac{9}{4(x-3)}$$

1.4.

(1) 最初に $\cos x$ を求める. $\sin x = \dfrac{5}{13}$ より,

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{144}{169}$$

よって, $\cos x = \pm\dfrac{12}{13}$. ここで, $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ より $\cos x < 0$ である. ゆえに, $\cos x = -\dfrac{12}{13}$ を得る. また, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{5}{12}$.

(2) 最初に $\cos x$ を求める．$\tan x = 2$ より，

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{5}$$

よって, $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. ここで, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x > 0$ である．ゆえに, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ を得る．また, $\sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

1.5.

(1) $\frac{\pi}{12}$ ラジアンは $15°$ である．$15° = 45° - 30°$ より，

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2) $\frac{5}{12}\pi$ ラジアンは $75°$ である．$75° = 45° + 30°$ より，

$$\begin{aligned}\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(3) $\frac{7}{12}\pi$ ラジアンは $105°$ である．$105° = 45° + 60°$ より，

$$\begin{aligned}\cos\frac{7}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

(4) $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ より, $\sin\frac{\pi}{8} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. ここで, $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ より, $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ である．よって, $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(5) 加法定理から次を得る．

$$\cos\frac{13}{8}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{3}{8}\pi\right) = \cos\frac{3}{8}\pi$$

また, $\cos^2\frac{3}{8}\pi = \frac{1+\cos\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ より, $\cos\frac{3}{8}\pi = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. ここで, $\frac{3}{8}\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ より, $\cos\frac{3}{8}\pi > 0$ である．よって,

$$\cos\frac{13}{8}\pi = \cos\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(6) $\dfrac{2}{5}\pi = x$ とおいて, $\cos x$ を求めればよい. $5x = 2\pi$ より, $3x = 2\pi - 2x$ である. よって, $\sin 3x = \sin(2\pi - 2x) = -\sin 2x$. ここで,

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x)\\ &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x\\ &= 2\sin x\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\sin x\\ &= \sin x(4\cos^2 x - 1)\end{aligned}$$

また, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ であるので, $\sin 3x = -\sin 2x$ より次を得る.

$$\sin x(4\cos^2 x - 1) = -2\sin x\cos x$$

ここで, $\sin\dfrac{2}{5}\pi \neq 0$ から

$$\begin{aligned}\sin x(4\cos^2 x - 1) = -2\sin x\cos x &\iff 4\cos^2 x - 1 = -2\cos x\\ &\iff \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

ここで, $\dfrac{2}{5}\pi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x > 0$. ゆえに, $\cos\dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

1.6.

(1) ● $\theta = \dfrac{13}{12}\pi$ のとき. $\dfrac{13}{12}\pi$ラジアン $= 195^\circ$ である. $195^\circ = 135^\circ + 60^\circ$ より, 次を得る.

$$\begin{aligned}\sin\frac{13}{12}\pi = \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\frac{3}{4}\pi\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{3}{4}\pi\sin\frac{\pi}{3}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \cos\frac{13}{12}\pi = \cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\frac{3}{4}\pi\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{3}{4}\pi\sin\frac{\pi}{3}\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\tan\frac{13}{12}\pi = \frac{\sin\frac{13}{12}\pi}{\cos\frac{13}{12}\pi} = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

● $\theta = \dfrac{7}{6}\pi$ のとき.

$$\sin\frac{7}{6}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{6} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{7}{6}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{6} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{7}{6}\pi = \frac{\sin\frac{7}{6}\pi}{\cos\frac{7}{6}\pi} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

● $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$ のとき,

$$\sin\frac{5}{4}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{4} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{5}{4}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{4} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\frac{5}{4}\pi = \frac{\sin\frac{5}{4}\pi}{\cos\frac{5}{4}\pi} = 1$$

● $\theta = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき.

$$\sin\frac{4}{3}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{3} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{4}{3}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{3} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{4}{3}\pi = \frac{\sin\frac{4}{3}\pi}{\cos\frac{4}{3}\pi} = \sqrt{3}$$

● $\theta = \dfrac{17}{12}\pi$ のとき. $\dfrac{17}{12}\pi$ラジアン $= 255^\circ$ である. $255^\circ = 135^\circ + 120^\circ$ より次を得る.

$$\begin{aligned}\sin\frac{17}{12}\pi = \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) &= \sin\frac{3}{4}\pi\cos\frac{2}{3}\pi + \cos\frac{3}{4}\pi\sin\frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos\frac{17}{12}\pi = \cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) &= \cos\frac{3}{4}\pi\cos\frac{2}{3}\pi - \sin\frac{3}{4}\pi\sin\frac{2}{3}\pi \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$
$$\tan\frac{17}{12}\pi = \frac{\sin\frac{17}{12}\pi}{\cos\frac{17}{12}\pi} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4} = 2+\sqrt{3}$$

● $\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき.

$$\sin\frac{3}{2}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{2} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{2} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{2} = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\tan\frac{3}{2}\pi = \frac{\sin\frac{3}{2}\pi}{\cos\frac{3}{2}\pi} = -\frac{1}{0} \quad \text{よって,} \tan\frac{3}{2}\pi \text{ は定義されない.}$$

● $\theta = \dfrac{19}{12}\pi$ のとき.

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{19}{12}\pi = \sin\left(\frac{13}{12}\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\frac{13}{12}\pi\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{13}{12}\pi\sin\frac{\pi}{2} \\
&= \cos\frac{13}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\
\cos\frac{19}{12}\pi = \cos\left(\frac{13}{12}\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\frac{13}{12}\pi\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{13}{12}\pi\sin\frac{\pi}{2} \\
&= -\sin\frac{13}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\tan\frac{19}{12}\pi = \frac{\sin\frac{19}{12}\pi}{\cos\frac{19}{12}\pi} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = -\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4} = -2-\sqrt{3}
$$

● $\theta = \dfrac{5}{3}\pi$ のとき.

$$
\sin\frac{5}{3}\pi = \sin\left(\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \sin\pi\cos\frac{2}{3}\pi + \cos\pi\sin\frac{2}{3}\pi = -\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}
$$

$$
\cos\frac{5}{3}\pi = \cos\left(\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\pi\cos\frac{2}{3}\pi - \sin\pi\sin\frac{2}{3}\pi = -\cos\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}
$$

$$
\tan\frac{5}{3}\pi = \frac{\sin\frac{5}{3}\pi}{\cos\frac{5}{3}\pi} = -\sqrt{3}
$$

● $\theta = \dfrac{7}{4}\pi$ のとき.

$$
\sin\frac{7}{4}\pi = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3}{2}\pi\sin\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}
$$

$$
\cos\frac{7}{4}\pi = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{3}{2}\pi\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}
$$

$$
\tan\frac{7}{4}\pi = \frac{\sin\frac{7}{4}\pi}{\cos\frac{7}{4}\pi} = -1
$$

● $\theta = 2\pi$ のときは, 三角関数の定義から $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$, $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$, $\tan 2\pi = \tan 0 = 0$.

● $\theta = \dfrac{11}{6}\pi$ のとき.

$$\sin\frac{11}{6}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\pi\cos\frac{\pi}{6} - \cos 2\pi\sin\frac{\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{11}{6}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\pi\cos\frac{\pi}{6} - \sin 2\pi\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{11}{6}\pi = \frac{\sin\frac{11}{6}\pi}{\cos\frac{11}{6}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

● $\theta = \dfrac{23}{12}\pi$ のとき. 三角関数の定義から,

$$\begin{aligned}
\sin\frac{23}{12}\pi &= \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\
\cos\frac{23}{12}\pi &= \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$
$$\tan\frac{23}{12}\pi = \frac{\sin\frac{23}{12}\pi}{\cos\frac{23}{12}\pi} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = -\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4} = -2+\sqrt{3}$$

ゆえに,

x	$\frac{13}{12}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{17}{12}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	-1
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\tan x$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	\

x	$\dfrac{19}{12}\pi$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\dfrac{7}{4}\pi$	$\dfrac{11}{6}\pi$	$\dfrac{23}{12}\pi$	2π
$\sin x$	$-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\cos x$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
$\tan x$	$-2-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$-2+\sqrt{3}$	0

1.7.

(1) $3^3 \times 9 = 3^3 \times 3^2 = 3^{3+2} = 3^5 = 243$

(2) $3^{-5} \times 3^7 = 3^{-5+7} = 3^2 = 9$

(3) $\sqrt[6]{4^3} = 4^{\frac{3}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2$

(4) $4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32$

(5) $25^{\frac{-1}{2}} = (5^2)^{\frac{-1}{2}} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

(6) $2^{\sqrt{4}} = 2^2 = 4$

(7) $3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = 3 \times 3^{-3} = 3^{1-3} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

(8) $24 \times 2^3 = 2^3 \times 3 \times 2^3 = 2^6 \times 3 = 64 \times 3 = 192$

(9) $\dfrac{1}{5} \times 35^2 = 5^{-1} \times 5^2 \times 7^2 = 5 \times 7^2 = 5 \times 49 = 245$

(10) $2^{10} \times 4^{-5} = 2^{10} \times (2^2)^{-5} = 2^{10} \times 2^{-10} = 2^0 = 1$

(11) $6^5 \times 3^{-4} = 2^5 \times 3^5 \times 3^{-4} = 2^5 \times 3 = 32 \times 3 = 96$

(12) $22^3 \div 121 = 2^3 \times 11^3 \times 11^{-2} = 2^3 \times 11 = 88$

1.8.

(1) $x^2 + 5x + 4 = 0 \iff (x+1)(x+4) = 0$. よって, $x = -1, -4$.

(2) $x^2 + x - 1 = 0$. 2次方程式の解の公式より, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(3) $2^{2x+1} = 4 \iff 2^{2x+1} = 2^2$. よって, $2x + 1 = 2$. ゆえに $x = \dfrac{1}{2}$.

(4) $6 \cdot 2^x = 24 \iff 2^x = 2^2$. よって, $x = 2$.

(5) $X = 3^x$ とおく. このとき,

$$9^x - 3^x - 6 = 0 \iff X^2 - X - 6 = 0 \iff (X-3)(X+2) = 0$$

よって, $X = 3, -2$. ここで, $X = 3^x > 0$ より, $X = -2$ は不適. ゆえに, $X = 3$ から $x = 1$ を得る.

(6) $X = 2^x$ とおく．このとき，

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 12 = 0 \iff 2X^2 - 5X - 12 = 0$$
$$\iff (X-4)(2X+3) = 0$$

よって，$X = 4, -\dfrac{3}{2}$．ここで，$X = 2^x > 0$ より，$X = -\dfrac{3}{2}$ は不適．ゆえに，$X = 4$ から $x = 2$ を得る．

1.9.

(1) $\log_2 15 = \log_2(3 \times 5) = \log_2 3 + \log_2 5$.

(2) $\log_2 6 = \log_2(2 \times 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$.

(3) $\log_2 \dfrac{3}{5} = \log_2 3 - \log_2 5$.

(4) $\log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -\log_2 2 = -1$.

(5) $\log_2 \dfrac{15}{4} = \log_2 15 - \log_2 4 = \log_2(3 \times 5) - \log_2 2^2 = \log_2 3 + \log_2 5 - 2$.

(6) $\log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$.

(7) $\log_{15} 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 15} = \dfrac{1}{\log_2 3 + \log_2 5}$.

(8) $\log_8 10 = \dfrac{\log_2 10}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2(2 \times 5)}{\log_2 2^3} = \dfrac{\log_2 2 + \log_2 5}{3 \log_2 2} = \dfrac{1 + \log_2 5}{3}$.

(9) $\log_5 \dfrac{25}{4} = \log_5 25 - \log_5 4 = \log_5 5^2 - \dfrac{\log_2 4}{\log_2 5} = 2\log_5 5 - \dfrac{2\log_2 2}{\log_2 5} = 2 - \dfrac{2}{\log_2 5}$.

(10) $\log_5 \sqrt{3} = \log_5 3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_5 3 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5} = \dfrac{\log_2 3}{2\log_2 5}$.

(11) $\log_2 \sqrt[5]{15} = \log_2 15^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5}\log_2(3 \times 5) = \dfrac{1}{5}(\log_2 3 + \log_2 5)$.

(12) $x = 2^{\log_2 3}$ とおいて x を求めればよい．両辺に底を 2 とする対数をとると，$\log_2 x = \log_2 2^{\log_2 3}$．ここで，

$$\log_2 2^{\log_2 3} = \log_2 3 \times \log_2 2 = \log_2 3$$

よって，$\log_2 x = \log_2 3$ となることから，$x = 3$.

1.10.

(1) $\log_3(x+2) = 0 \iff \log_3(x+2) = \log_3 1$．よって，$x + 2 = 1$ より，$x = -1$.

(2) $\log_9(x^2+2x+1)=\log_9(x+1)^2=2\dfrac{\log_3|x+1|}{\log_3 9}=\log_3|x+1|$ より,

$$\begin{aligned}\log_3(x^2+1)=\log_9(x^2+2x+1) &\iff \log_3(x^2+1)=\log_3|x+1| \\ &\iff x^2+1=|x+1|\end{aligned}$$

ここで, $x \geqq -1$ のときは, $x^2+1=x+1$ より, $x(x-1)=0$. よって, $x=0,1$. また, $x<-1$ のときは, $x^2+1=-x-1$ より, $x^2+x+2=0$ すなわち, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$ となり不適. ゆえに, $x=0,1$.

(3) $\log_2 x = X$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned}(\log_2 x)^2+\log_2 x-6=0 &\iff X^2+X-6=0 \\ &\iff (X-2)(X+3)=0 \\ &\iff X=2,-3\end{aligned}$$

よって, $\log_2 x=2,-3$ より, $x=4,\dfrac{1}{8}$.

(4) $\log_x 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}=\dfrac{1}{\log_2 x}$ より,

$$\log_2 x=\log_x 2 \iff \log_2 x=\frac{1}{\log_2 x} \iff (\log_2 x)^2=1$$

よって, $\log_2 x=\pm 1$. ゆえに, $x=\dfrac{1}{2},2$.

1.11.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1}(3x+1)=3\times(-1)+1=-2.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(2x^2+3x-1)=2\times 2^2+3\times 2-1=13.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-3x}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-3}{2-\frac{1}{x}}=-\frac{3}{2}.$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0.$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=2.$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+2}{x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}}=0.$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1+(-1)^{[x]}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{(-1)^x}{x}\right)=2.$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{x+2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2}=+\infty.$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}=\lim_{x\to\infty}(-\sqrt{x}-\sqrt{x+1})=-\infty.$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{3^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^x-\frac{1}{3^x}}{1-\frac{1}{3^x}}=0.$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot10^x-3}{2\cdot10^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{10^x}}{2+\frac{1}{10^x}}=2.$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot3^x+3}{3^x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{3^x}}{1+(\frac{2}{3})^x}=2.$

(16) $\displaystyle\frac{3}{x}=\frac{1}{t}$ とおくと, $x=3t$. よって,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^3=e^3$$

(17) $\displaystyle\frac{1}{2x}=\frac{1}{t}$ とおくと, $x=\dfrac{t}{2}$. よって,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{4x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^2=e^2$$

(18) $\displaystyle\frac{4}{x}=\frac{1}{t}$ とおくと, $x=4t$. よって,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+x}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{3x}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{12t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{12}=e^{12}$$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{3^x+4^x}=\lim_{x\to\infty}\left[4^x\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right]^{\frac{1}{x}}=4.$

(20) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{2\cdot 3^x+3\cdot 2^x}=\lim_{x\to\infty}\left[3^x\left\{2+3\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}3\left[2+3\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}=3.$$

(21) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos\frac{x\pi}{2}=1.$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}$. ここで，$-1\leqq\sin x\leqq 1$ より，$\displaystyle -\frac{1}{x}\leqq\frac{\sin x}{x}\leqq\frac{1}{x}$. また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ より，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. よって，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$$

(23) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\log e=1.$

(24) $-1\leqq\cos x\leqq 1$ より，$\displaystyle -\frac{1}{x}\leqq\frac{\cos x}{x}\leqq\frac{1}{x}$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ から，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0.$

1.12.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)=0.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x-2}=7.$

(4) $\displaystyle\frac{2}{x}=\frac{1}{t}$ とおくと，$x=2t$. よって，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=e^2$$

(5) $\displaystyle\frac{3}{2x}=\frac{1}{t}$ とおくと，$x=\dfrac{3}{2}t$. よって，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{4x}=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{6t}=e^6$$

(6) 最初に, $x \to 0$ ならば $\sin x \to 0$ より, $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = e$ であることに注意する. これより

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot 2\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0}\left\{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right\}^{2\frac{\sin x}{x}} = e^2$$

(7) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4}.$

(8) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2 = 2.$

(9) $\displaystyle \frac{1}{x} = t$ とおくと, $x \to \infty$ から $t \to 0$. よって,

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

(10) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin 2x}{2x+\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{\sin 2x}{x}}{2+\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{2+\frac{\sin x}{x}} = \frac{3+2}{2+1} = \frac{5}{3}.$

(11) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2 = 2.$

(12) $\displaystyle \frac{1}{x} = t$ とおくと, $x \to \infty$ より, $t \to 0+$. よって,

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{t\to 0+}\frac{e^t-1}{t} = 1$$

(13) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x} = 1.$

(14) $a^x = e^{x\log a}$ $(a>0)$ より,

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\log 3}-1}{x}-\frac{e^{x\log 2}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\log 3}-1}{x\log 3}\cdot\log 3-\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\cdot\log 2\right) = \log 3-\log 2$$

(15) 倍角の公式 $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ から,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2$$

(16) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\log e = \frac{1}{2}.$

(17) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1}=\frac{5}{2}.$$

(18) 倍角の公式 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ から,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 3x-1}{x^2}+\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{3}{2}x}{x^2}+\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left\{2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-2\left(\frac{\sin\frac{3}{2}x}{x}\right)^2\right\}\\&=2-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

(19) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}.$

(20) $\displaystyle \frac{3}{x}=\frac{1}{t}$ とおくと, $x=3t$. よって,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{3x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{3t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=0\times e^3=0$$

(21) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1.$

(22) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 1^2=\frac{1}{4}.$$

(23) 三角関数の合成から

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}$$

を得る. ここで, $t=x-\dfrac{\pi}{3}$ とおくと, $x\to\dfrac{\pi}{3}$ から $t\to 0$. よって,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{t}=2$$

(24) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}(e^x+1)=2.$

1.13.

(1) $\lim_{x\to 2+0} x^2 = 4.$

(2) $\lim_{x\to 1-0} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} \dfrac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}(x-1) = 0.$

(3) $y = -\dfrac{1}{x}$ のグラフより, $\lim_{x\to 0+} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty.$

(4) $y = \dfrac{2}{x-2}$ のグラフより, $\lim_{x\to 2-0} \dfrac{2}{x-2} = -\infty.$

(5) $y = \log x$ のグラフより, $\lim_{x\to 0+} \log x = -\infty.$

(6) $x \to 1+0$ は $x \to 1$ かつ $x > 1$ なので, $\lim_{x\to 1+0}[x] = 1.$

(7) $x \to 1-0$ は $x \to 1$ かつ $x < 1$ なので, $\lim_{x\to 1-0}[x] = 0.$

(8) $x \to 1+0$ は $x \to 1$ かつ $x > 1$ なので, $x-1 > 0$. よって,

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{|x-1|}{-x+1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{-(x-1)} = -1$$

(9) $x \to 0-$ より $x < 0$ である. よって, $y = -\dfrac{1}{x}$ のグラフから

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{|x|} = \lim_{x\to 0-} \left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

(10) $x \to 0-$ は $x \to 0$ かつ $x < 0$ なので, $\lim_{x\to 0-} \left(-\dfrac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0-} \left(-\dfrac{x}{-x}\right) = 1.$

(11) $x \to 2-0$ は $x \to 2$ かつ $x < 2$ なので, $\lim_{x\to 2-0}[x] = 1$. よって,

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{1} = 2$$

(12) $x \to 1-0$ は $x < 1$ なので, x が十分 1 に近い値では $[x] = 0$ である. すなわち, $x \to 1-0$ のとき, $[x]+x \to 1-0$ である. よって,

$$\lim_{x\to 1-0}[[x]+x] = \lim_{[x]+x\to 1-0}[[x]+x] = 0$$

1.14.

(1) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2+1) = 5$, $f(2) = 5$. よって, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ が成り立つので, $f(x) = x^2+1$ は $x = 2$ で連続である.

(2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = 0$, $f(1) = 0$. よって, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ が成り立つので, $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ は $x = 1$ で連続である.

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $x = 0$ で定義されないので, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $x = 0$ で連続ではない.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{x}{x}\right) = -1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\left(-\frac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0-}\frac{x}{x} = 1.$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しないので, $f(x) = -\dfrac{x}{|x|}$ は $x = 0$ で連続ではない.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}|x| = 0$, $f(0) = 0$. よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ が成り立つので, $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で連続である.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2) = -1,$

$f(1) = -1$. よって, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ が成り立つので, $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ は $x = 1$ で連続である.

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}[x+2] = 3$, $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}[x+2] = 2.$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ は存在しないので, $f(x) = [x+2]$ は $x = 1$ で連続ではない.

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{x^2+x}{|x|} = \lim_{x\to 0+}\frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0+}(x+1) = 1,$

$\displaystyle\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x}{|x|} = \lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x}{-x} = \lim_{x\to 0-}(-x-1) = -1.$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しないので, $f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x|}$ は $x = 0$ で連続ではない.

1.15

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおく. $f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で連続である. ここで, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ より, 中間値の定理から $f(x) = 0$ となる x が区間 $[0, 1]$ に存在する.

(2) $f(x) = \sin x - x\cos x$ とおく. $f(x)$ は区間 $\left[\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right]$ で連続である. ここで, $f(\pi) = \pi > 0$, $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = -1 < 0$ より, 中間値の定理から $f(x) = 0$ となる x が区間 $\left[\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right]$ に存在する.

(3) $f(x) = x(x-1) + (x-1)(x-2) + x(x-2)$ とおく. $f(x)$ は連続関数である. ここで, $f(0) = 2 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 2 > 0$ より, 中間値の定理から $f(x) = 0$ となる x が区間 $[0, 1]$ と $[1, 2]$ に存在する.

1.16.

(1) $(x^4)' = 4x^3.$

(2) $(2x^3 + x^2)' = 2(x^3)' + (x^2)' = 6x^2 + 2x.$

(3) $$\left(-\frac{1}{x}\right)' = (-x^{-1})' = -(-1)x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

(4) $$\left(2x^2 - x + \frac{2}{x^2}\right)' = (2x^2 - x + 2x^{-2})' = 4x - 1 - 4x^{-3} = 4x - 1 - \frac{4}{x^3}.$$

(5) $(xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$

(6) $$\{e^x(\tan x + 1)\}' = (e^x)'(\tan x + 1) + e^x(\tan x + 1)'$$
$$= e^x(\tan x + 1) + e^x \cdot \frac{1}{\cos^2} = e^x\left(\tan x + 1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right).$$

(7) $$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

(8) $(\sin x \cos x)' = (\sin x)' \cos x + \sin x(\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x.$

(9) $$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

(10) $$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

(11) $$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x x'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}e^x.$$

(12) $$\left\{(x^2 + 2x + 3)e^x\right\}' = (x^2 + 2x + 3)'e^x + (x^2 + 2x + 3)(e^x)'$$
$$= (2x+2)e^x + (x^2 + 2x + 3)e^x = (x^2 + 4x + 5)e^x.$$

(13) $$\left(\frac{1}{x^2+3x+2}\right)' = -\frac{(x^2+3x+2)'}{(x^2+3x+2)^2} = -\frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}.$$

(14) $$\left(e^{-x}\right)' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = -\frac{(e^x)'}{e^{2x}} = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}.$$

(15) $$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{\log a}(\log x)' = \frac{1}{x \log a}.$$

(16) $$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

1.17.

(1) $2x + 1 = t$ とおくと, $\left\{(2x+1)^3\right\}' = (t^3)' \times (2x+1)' = 3t^2 \times 2 = 6(2x+1)^2.$

(2) $x^2 + 1 = t$ とおくと, $\left\{(x^2+1)^4\right\}' = (t^4)' \times (x^2+1)' = 4t^3 \times 2x = 8x(x^2+1)^3.$

(3) $x-\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，

$$\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\right\}'=(t^3)'\times\left(x-\frac{1}{x}\right)'=3t^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

(4) $3x=t$ とおくと，$(\tan 3x)'=(\tan t)'\times(3x)'=\dfrac{1}{\cos^2 t}\times 3=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$.

(5) $2x^2+x=t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left\{\cos(2x^2+x)\right\}'&=(\cos t)'\times(2x^2+x)'\\&=-\sin t\times(4x+1)=-(4x+1)\sin(2x^2+x)\end{aligned}$$

(6) $\cos x=t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\{\sin(\cos x)\}'&=(\sin t)'\times(\cos x)'\\&=\cos t\times(-\sin x)=-\sin x\cos(\cos x)\end{aligned}$$

(7) $-x^2=t$ とおくと，$(e^{-x^2})'=(e^t)'\times(-x^2)'=e^t\times(-2x)=-2xe^{-x^2}$.

(8) $2x^2-\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left(e^{2x^2-\frac{1}{x}}\right)'&=(e^t)'\times\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)'\\&=e^t\times\left(4x+\frac{1}{x^2}\right)=\left(4x+\frac{1}{x^2}\right)e^{2x^2-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

(9) $\sin x=t$ とおくと，$\left(e^{\sin x}\right)'=(e^t)'\times(\sin x)'=e^t\times\cos x=\cos xe^{\sin x}$.

(10) $e^x=t$ とおくと，$\left(e^{e^x}\right)'=(e^t)'\times(e^x)'=e^t\times e^x=e^xe^{e^x}=e^{x+e^x}$.

(11) $3x^2+1=t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3x^2+1}\right)'&=\left\{\left(3x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}'\\&=(t^{\frac{1}{2}})'\times(3x^2+1)'\\&=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\times 6x=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}\end{aligned}$$

(12) $2x^2+3x=t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{2x^2+3x}\right)'&=\left\{\left(2x^2+3x\right)^{\frac{1}{3}}\right\}'\\&=(t^{\frac{1}{3}})'\times(2x^2+3x)'\\&=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\times(4x+3)=\frac{4x+3}{3(2x^2+3x)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

(13) $4x^2 + x^{\frac{1}{2}} = t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{4x^2+\sqrt{x}}\right)' &= \left\{\left(4x^2 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}' \\ &= (t^{\frac{1}{2}})' \times (4x^2 + x^{\frac{1}{2}})' \\ &= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times \left(8x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{t}}(16x\sqrt{x}+1) = \frac{16x\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{4x^2+\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

(14) $\sin x + 1 = t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\sin x + 1}\right)' &= \left\{(\sin x + 1)^{\frac{1}{2}}\right\}' \\ &= (t^{\frac{1}{2}})' \times (\sin x + 1)' \\ &= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x + 1}}\end{aligned}$$

(15) $x^{\frac{1}{2}} = t$ とおくと,

$$\begin{aligned}(\sin\sqrt{x})' &= \left(\sin x^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= (\sin t)' \times (x^{\frac{1}{2}})' \\ &= \cos t \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

(16) $x^2+1 = t$ とおくと, $\left\{\log(x^2+1)\right\}' = (\log t)' \times (x^2+1)' = \dfrac{1}{t} \times 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

(17) $e^{\log x} = y$ とおくと, $\log y = \log e^{\log x} = \log x$. よって, $y = e^{\log x} = x$. ゆえに, $(e^{\log x})' = (x)' = 1$.

(18) $4x = t$ とおくと, $(\tan 4x)' = (\tan t)' \times (4x)' = \dfrac{1}{\cos^2 t} \times 4 = \dfrac{4}{\cos^2 4x}$.

(19) $x^2 = t$ とおくと, $\left(2^{x^2}\right)' = (2^t)' \times (x^2)' = 2^t \log 2 \times 2x = x2^{x^2+1}\log 2$.

(20) $2^x = t$ とおくと, $\left(3^{2^x}\right)' = (3^t)' \times (2^x)' = 3^t \log 3 \times 2^x \log 2 = 2^x 3^{2^x} \log 2 \cdot \log 3$.

(21) $\dfrac{\sin x}{x+1} = t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left\{\left(\frac{\sin x}{x+1}\right)^2\right\}' &= (t^2)' \times \left(\frac{\sin x}{x+1}\right)' \\ &= 2t \times \frac{(x+1)\cos x - \sin x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2\sin x}{(x+1)^3}\left\{(x+1)\cos x - \sin x\right\}\end{aligned}$$

(22) $x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\left\{\log(x+\sqrt{x^2+1})\right\}' &= \left[\log\left\{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right\}\right]' \\ &= (\log t)'\left\{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right\}' \\ &= \frac{1}{t}\left\{1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}} \times (x^2+1)'\right\} \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

(23) $1 + x^2 = t$ とおくと,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \left\{(1+x^2)^{\frac{-1}{2}}\right\}' = (t^{-\frac{1}{2}})' \times (1+x^2)' = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \times 2x = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(24) $(\sin^2 x + \sin 2x)' = 2\sin x \times (\sin x)' + \cos 2x \times (2x)' = 2\sin x\cos x + 2\cos 2x.$

(25) $(e^{\tan x})' = e^{\tan x}(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}e^{\tan x}.$

(26) $\{\log(e^x+1)\}' = \dfrac{(e^x+1)'}{e^x+1} = \dfrac{e^x}{e^x+1}.$

(27)

$$\left(\log\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)' = \left\{\log\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{x^2+1-x^2}\right\}'$$
$$= \left\{2\log(\sqrt{x^2+1}-x)\right\}'$$
$$= 2\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)'}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x}\left\{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times(x^2+1)'-1\right\}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

(28)

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x+e^{-x})'(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})'}{(e^x-e^{-x})^2}$$
$$= \frac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}$$
$$= \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}-e^{2x}-2-e^{-2x}}{(e^x-e^{-x})^2}$$
$$= -\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$$

(29) $\left\{\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)' = \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right).$

(30) $\left(\dfrac{2}{1+e^{3x}}\right)' = -\dfrac{2(1+e^{3x})'}{(1+e^{3x})^2} = -\dfrac{6e^{3x}}{(1+e^{3x})^2}.$

1.18.

(1) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)}{\sqrt{x+3}(x-2)^3}$ とおく．両辺の対数をとると,

$$\log f(x) = \log\frac{(x+1)^2(x-1)}{\sqrt{x+3}(x-2)^3}$$
$$= 2\log(x+1)+\log(x-1)-\frac{1}{2}\log(x+3)-3\log(x-2)$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x+3)}-\frac{3}{x-2}$$

よって,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\left\{\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x+3)}-\frac{3}{x-2}\right\} \\ &= \frac{(x+1)^2(x-1)}{\sqrt{x+3}(x-2)^3}\left\{\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x+3)}-\frac{3}{x-2}\right\} \end{aligned}$$

(2) $f(x)=\dfrac{(x^2+1)^2\sqrt{x-1}}{(2x-1)^3(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\begin{aligned} \log f(x) &= \log\frac{(x^2+1)^2\sqrt{x-1}}{(2x-1)^3(x^3+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\log(x-1)-3\log(2x-1)-\frac{3}{2}\log(x^3+1) \end{aligned}$$

両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2(x^2+1)'}{x^2+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3(2x-1)'}{2x-1}-\frac{3(x^3+1)'}{2(x^3+1)} \\ &= \frac{4x}{x^2+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{6}{2x-1}-\frac{9x^2}{2(x^3+1)} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\left\{\frac{4x}{x^2+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{6}{2x-1}-\frac{9x^2}{2(x^3+1)}\right\} \\ &= \frac{(x^2+1)^2\sqrt{x-1}}{(2x-1)^3(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{4x}{x^2+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{6}{2x-1}-\frac{9x^2}{2(x^3+1)}\right\} \end{aligned}$$

(3) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}{(2x^2+3)^3\sqrt[3]{x+1}}$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\begin{aligned} \log f(x) &= \log\frac{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}{(2x^2+3)^3\sqrt[3]{x+1}} \\ &= 2\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(x^2+1)-3\log(2x^2+3)-\frac{1}{3}\log(x+1) \end{aligned}$$

両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2}{x-1}+\frac{(x^2+1)'}{2(x^2+1)}-\frac{3(2x^2+3)'}{2x^2+3}-\frac{1}{3(x+1)} \\ &= \frac{2}{x-1}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{12x}{2x^2+3}-\frac{1}{3(x+1)} \end{aligned}$$

よって,

$$f'(x)=f(x)\left\{\frac{2}{x-1}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{12x}{2x^2+3}-\frac{1}{3(x+1)}\right\}$$
$$=\frac{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}{(2x^2+3)^3\sqrt[3]{x+1}}\left\{\frac{2}{x-1}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{12x}{2x^2+3}-\frac{1}{3(x+1)}\right\}$$

(4) $f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^x$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\log f(x)=\log\left(\frac{1}{x}\right)^x=-x\log x$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(-x)'\log x-x(\log x)'=-\log x-1$$

よって,

$$f'(x)=f(x)(-\log x-1)=-\left(\frac{1}{x}\right)^x(\log x+1)$$

(5) $f(x)=(\sin x)^x$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\log f(x)=\log(\sin x)^x=x\log(\sin x)$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=x'\log(\sin x)+x\{\log(\sin x)\}'$$
$$=\log(\sin x)+x\frac{(\sin x)'}{\sin x}$$
$$=\log(\sin x)+x\frac{\cos x}{\sin x}$$

よって,

$$f'(x)=f(x)\left\{\log(\sin x)+x\frac{\cos x}{\sin x}\right\}$$
$$=(\sin x)^x\left\{\log(\sin x)+x\frac{\cos x}{\sin x}\right\}$$

(6) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\log f(x)=\log x^{\frac{1}{x}}=\frac{\log x}{x}$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x(\log x)'-x'\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

よって,

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{1-\log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$$

1.19.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2\sin^3\theta)'}{(2\cos^3\theta)'} = \dfrac{6\sin^2\theta\cos\theta}{-6\cos^2\theta\sin\theta} = -\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2\sin\theta)'}{(3\cos\theta)'} = -\dfrac{2\cos\theta}{3\sin\theta}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(3\sin\theta)'}{(2\cos^2\theta)'} = \dfrac{3\cos\theta}{-4\sin\theta\cos\theta} = -\dfrac{3}{4\sin\theta}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2^t-2^{-t})'}{(2^t+2^{-t})'} = \dfrac{2^t\log 2 + 2^{-t}\log 2}{2^t\log 2 - 2^{-t}\log 2} = \dfrac{2^t+2^{-t}}{2^t-2^{-t}}$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\frac{2t}{1+t^2})'}{(\frac{1-t^2}{1+t^2})'} = \dfrac{\frac{(2t)'(1+t^2)-2t(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}}{\frac{(1-t^2)'(1+t^2)-(1-t^2)(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}}$

$\quad = \dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)} = \dfrac{t^2-1}{2t}$

(6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\frac{e^t-e^{-t}}{2})'}{(\frac{e^t+e^{-t}}{2})'} = \dfrac{\frac{e^t+e^t}{2}}{\frac{e^t-e^{-t}}{2}} = \dfrac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}$

1.20.

(1) $y' = -1 < 0$ より, $y = -x+1$ の逆関数は存在する.

$$y = -x+1 \iff x = -y+1$$

よって, $y = -x+1$ の逆関数は $y = -x+1$.

(2) $y' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ より, $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ の逆関数は存在する.

$$y = \frac{1}{x}\ (x>0) \iff x = \frac{1}{y}\ (y>0)$$

よって, $y = \dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ の逆関数は $y = \dfrac{1}{x}$ $(x>0)$.

(3) $x < -1$ において $y' = 2x+2 = 2(x+1) < 0$ より, $y = x^2+2x-1$ $(x \leqq -1)$ の逆関数は存在する.

$$\begin{aligned} y = x^2+2x-1 &\iff x^2+2x-1-y = 0 \\ &\iff x = -1 \pm \sqrt{y+2} \end{aligned}$$

ここで, $x \leqq -1$ より, $x = -1-\sqrt{y+2}$. よって, $y = x^2+2x-1$ $(x \leqq -1)$ の逆関数は $y = -1-\sqrt{x+2}$.

(4) $y' = 2^x \log 2 > 0$ より, $y = 2^x$ の逆関数は存在する.

$$y = 2^x \iff \log_2 y = \log_2 2^x = x$$

よって, $y = 2^x$ の逆関数は $y = \log_2 x$

(5) $y' = 4x + 4 = 4(x+1)$ より, $x = -1$ のとき $y' = 0$. よって, $y = 2x^2 + 4x + 1$ $(x \leqq 1)$ は逆関数を持たない.

(6) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ より, $y = \sqrt{x}$ の逆関数は存在する.

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \ (y \geqq 0)$$

よって, $y = \sqrt{x}$ の逆関数は $y = x^2$ $(x \geqq 0)$.

(7) $x > 0$ のとき $y' = 2^x \log 2 - 2^{-x} \log 2 = (2^x - 2^{-x}) \log 2 > 0$ より, $y = 2^x + 2^{-x}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数は存在する

$$\begin{aligned} y = 2^x + 2^{-x} &\iff 2^{2x} - y \cdot 2^x + 1 = 0 \\ &\iff 2^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \\ &\iff x = \log_2 \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \end{aligned}$$

ここで, $y = 2^x + 2^{-x}$ は点 $\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$ を通るので, $y = \dfrac{5}{2}$ を上の式に代入することで, $x = \log_2 \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ を得る. よって, $y = 2^x + 2^{-x}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数は $y = \log_2 \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$.

(8) $x > 0$ のとき $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ より, $y = \sqrt{x^2 + 1}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数は存在する.

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \iff y^2 = x^2 + 1 \ (y \geqq 1) \iff x = \pm\sqrt{y^2 - 1} \ (y \geqq 1)$$

ここで, $x \geqq 0$ より, $x = \sqrt{y^2 - 1}$. よって, $y = \sqrt{x^2 + 1}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数は $y = \sqrt{x^2 - 1}$ $(x \geqq 1)$.

1.21.

(1) $x = \cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ とおいて $\sin x$ を求めればよい. $x = \cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ より, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. よって, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \dfrac{9}{10}$ から $\sin x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. ここで, $x \in [0, \pi]$ より $\sin x \geqq 0$. ゆえに, $\sin x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

(2) $x = \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおいて $\tan x$ を求めればよい. $x = \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$ より, $\cos x = \dfrac{1}{3}$. よって, $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 9$ から $\tan x = \pm 2\sqrt{2}$. ここで, $x \in [0, \pi]$ かつ $\cos x > 0$ より $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. すなわち $\tan x \geqq 0$. ゆえに $\tan x = 2\sqrt{2}$.

(3) $x = \sin^{-1}\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ とおいて $\cos x$ を求めればよい. $x = \sin^{-1}\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ より, $\sin x = -\dfrac{4}{5}$. よって, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \dfrac{9}{25}$ から $\cos x = \pm\dfrac{3}{5}$. ここで, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x \geqq 0$. ゆえに $\cos x = \dfrac{3}{5}$.

(4) $x = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおいて $\sin x$ を求めればよい. $x = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ より, $\tan x = \dfrac{3}{4}$. よって, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{16}{25}$ から $\cos x = \pm\dfrac{4}{5}$. ここで, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ より $\cos x \geqq 0$. よって $\cos x = \dfrac{4}{5}$. ゆえに $\sin x = \tan x \cdot \cos x = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{5}$.

(5) $x = \cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ とおいて $\tan x$ を求めればよい. $x = \cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ より, $\cos x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. よって, $\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \dfrac{1}{9}$ から $\tan x = \pm\dfrac{1}{3}$. ここで, $x \in [0, \pi]$, $\cos x > 0$ より $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. ゆえに, $\tan x > 0$ となり, $\tan x = \dfrac{1}{3}$.

(6) $x = \tan^{-1} 2$ とおいて $\cos x$ を求めればよい. $x = \tan^{-1} 2$ より, $\tan x = 2$. よって, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{1}{5}$ から $\cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. ここで, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ より $\cos x > 0$. よって, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(7) $x = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$, $y = \cos^{-1}\dfrac{4}{5}$ とおいて $\sin(x + y)$ を求めればよい.

$x = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ より $\sin x = \dfrac{3}{5}$. よって, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \dfrac{16}{25}$ から $\cos x = \pm\dfrac{4}{5}$. ここで, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x = \dfrac{4}{5}$.

一方, $y = \cos^{-1}\dfrac{4}{5}$ より $\cos y = \dfrac{4}{5}$. よって, $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = \dfrac{9}{25}$ から $\sin y = \pm\dfrac{3}{5}$. ここで $y \in [0, \pi]$ より $\sin y = \dfrac{3}{5}$.

よって,

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

(8) $x = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $y = \sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ とおいて $\cos(x + y)$ を求めればよい.

$x=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ より $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. よって, $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\dfrac{9}{10}$ から $\cos x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. ここで, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

一方, $y=\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ より $\sin y=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. よって, $\cos^2 y=1-\sin^2 y=\dfrac{1}{10}$ から $\cos y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. ここで $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

よって,

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=0$$

(9) $x=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$, $y=\tan^{-1}4$ とおいて $\tan(x+y)$ を求めればよい.

$x=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$ より $\tan x=\dfrac{1}{2}$. また, $y=\tan^{-1}4$ より $\tan y=4$. よって,

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{1}{2}+4}{1-\frac{1}{2}\cdot 4}=-\frac{9}{2}$$

(10) $x=\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$, $y=\sin^{-1}\dfrac{12}{13}$ とおいて $\tan(x+y)$ を求めればよい.

$x=\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$ より $\cos x=\dfrac{3}{5}$. よって, $\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\dfrac{16}{9}$ から $\tan x=\pm\dfrac{4}{3}$. ここで, $x\in[0,\pi]$, $\cos x>0$ より $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. よって, $\tan x=\dfrac{4}{3}$.

一方, $y=\sin^{-1}\dfrac{12}{13}$ より $\sin y=\dfrac{12}{13}$. よって,

$$\tan^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}-1=\frac{1}{1-\sin^2 y}-1=\frac{144}{25}$$

から $\tan y=\pm\dfrac{12}{5}$. ここで $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin y>0$ より $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. よって, $\tan y=\dfrac{12}{5}$.

ゆえに,

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{12}{5}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{5}}=-\frac{56}{33}$$

(11) $x=\sin^{-1}\dfrac{7}{25}$, $y=\sin^{-1}\dfrac{24}{25}$ とおいて $x+y$ を求めればよい.

$x=\sin^{-1}\dfrac{7}{25}$ より $\sin x=\dfrac{7}{25}$. よって, $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\dfrac{576}{625}$ から $\cos x=\pm\dfrac{24}{25}$. ここで, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos x=\dfrac{24}{25}$.

一方, $y=\sin^{-1}\dfrac{24}{25}$ より $\sin y=\dfrac{24}{25}$. よって, $\cos^2 y=1-\sin^2 y=\dfrac{49}{625}$ から $\cos y=\pm\dfrac{7}{25}$. ここで $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より $\cos y=\dfrac{7}{25}$.

ゆえに,

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=\frac{7}{25}\cdot\frac{7}{25}+\frac{24}{25}\cdot\frac{24}{25}=1$$

また, $x,y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ から $x+y\in[-\pi,\pi]$. よって, $x+y=\dfrac{\pi}{2}$.

(12) $x=\tan^{-1}2$, $y=\tan^{-1}3$ とおいて $x+y$ を求めればよい.
$x=\tan^{-1}2$ より $\tan x=2$. また, $y=\tan^{-1}3$ より $\tan y=3$. よって,

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1$$

一方, $x,y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ かつ $\tan x,\tan y>0$ より $x,y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. これより $x+y\in(0,\pi)$. よって, $x+y=\dfrac{3}{4}\pi$.

(13) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)=\sin^{-1}(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$.

(14) $\cos^{-1}\left\{\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}=\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\pi$.

1.22.

(1) $\left(\cos^{-1}\dfrac{x}{2}\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\times\left(\dfrac{x}{2}\right)'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(2) $(\tan^{-1}e^x)'=\dfrac{1}{1+e^{2x}}\times(e^x)'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

(3) $\left\{\tan(\cos^{-1}x)\right\}'=\dfrac{1}{\cos^2(\cos^{-1}x)}\times(\cos^{-1}x)'=-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$,
$(\cos(\cos^{-1}x)=x$ を利用した.)

(4) $\left(e^{\sin^{-1}x}\right)'=e^{\sin^{-1}x}(\sin^{-1}x)'=\dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

(5) $f(x)=(\sin^{-1}x)^x$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\log f(x)=\log(\sin^{-1}x)^x=x\log(\sin^{-1}x)$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\log(\sin^{-1}x)+x\cdot\frac{(\sin^{-1}x)'}{\sin^{-1}x}\\&=\log(\sin^{-1}x)+\frac{x}{(\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= f(x)\left\{\log(\sin^{-1}x) + \frac{x}{(\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}}\right\} \\
&= (\sin^{-1}x)^x\left\{\log(\sin^{-1}x) + \frac{x}{(\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}}\right\}
\end{aligned}
$$

(6) $\left\{\sin^{-1}(\cos x)\right\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \times (\cos x)' = -\dfrac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = -\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$

(7) $\left\{\cos^{-1}(\sin x)\right\}' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \times (\sin x)' = -\dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = -\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$

(8) $\left\{\sin^{-1}(\sin x)\right\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \times (\sin x)' = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$

(9) $\left\{\cos^{-1}(\cos x)\right\}' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \times (\cos x)' = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$

(10) $f(x) = (\tan^{-1}x)^x$ とおく. 両辺の対数をとると,

$$\log f(x) = \log(\tan^{-1}x)^x = x\log(\tan^{-1}x)$$

両辺を x で微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \log(\tan^{-1}x) + x\cdot\frac{(\tan^{-1}x)'}{\tan^{-1}x} \\
&= \log(\tan^{-1}x) + \frac{x}{(1+x^2)\tan^{-1}x}
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= f(x)\left\{\log(\tan^{-1}x) + \frac{x}{(1+x^2)\tan^{-1}x}\right\} \\
&= (\tan^{-1}x)^x\left\{\log(\tan^{-1}x) + \frac{x}{(1+x^2)\tan^{-1}x}\right\}
\end{aligned}
$$

(11) $\left(\cos^{-1}\sqrt{x}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \times (\sqrt{x})' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

(12) $\left(\tan^{-1}\sqrt{x-1}\right)' = \dfrac{1}{1+(\sqrt{x-1})^2} \times (\sqrt{x-1})' = \dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

1.23.

(1) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ を示す.

$y_1 = \sin^{-1}x$, $y_2 = \cos^{-1}$ とおいて, $y_1 + y_2$ を求めればよい.

$y_1 = \sin^{-1}x$ より, $\sin y_1 = x$. よって, $\cos^2 y_1 = 1 - \sin^2 y_1 = 1 - x^2$ から $\cos y_1 = \pm\sqrt{1-x^2}$. ここで, $y_1 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ より, $\cos y_1 = \sqrt{1-x^2}$.

一方, $y_2=\cos^{-1}x$ より $\cos y_2=x$. よって, $\sin^2 y_2=1-\cos^2 y_2=1-x^2$ から $\sin y_2=\pm\sqrt{1-x^2}$. ここで, $y_2\in[0,\pi]$ より $\sin y_2=\sqrt{1-x^2}$.

よって,

$$\begin{aligned}\sin(y_1+y_2)&=\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2\\&=x\cdot x+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}=1\end{aligned}$$

ここで, $y_1\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y_2\in[0,\pi]$ より, $y_1+y_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$. これより, $y_1+y_2=\frac{\pi}{2}$.

(2) $\cos\left(\sin^{-1}x\right)=\sqrt{1-x^2}$ を示す.
$y=\sin^{-1}x$ とおいて, $\cos y$ を求めればよい.
$y=\sin^{-1}x$ より $\sin y=x$. よって, $\cos^2 y=1-\sin^2 y=1-x^2$ から $\cos y=\pm\sqrt{1-x^2}$. ここで, $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ より, $\cos y=\sqrt{1-x^2}$.

1.24.

(1) $y=\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおく. このとき, $\sin y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. よって,

$$\tan^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}-1=\frac{1}{1-\sin^2 y}-1=\frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}}-1=x^2$$

よって, $\tan y=\pm x$. ここで, $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ かつ $y=\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0$ より, $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ゆえに, $\tan y=x$ となり, $y=\tan^{-1}x$.

(2) $y=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ とおく. このとき, $\tan y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. よって,

$$\sin^2 y=\tan^2 y\cdot\cos^2 y=\frac{\tan^2 y}{1+\tan^2 y}=\frac{\frac{x^2}{1-x^2}}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}=x^2$$

よって, $\sin y=\pm x$. ここで, $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ かつ $y=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}>0$ より, $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. ゆえに, $\sin y=x$ となり, $y=\sin^{-1}x$.

(3) $y=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ とおく. このとき, $\cos y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. よって,

$$\tan^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}-1=\frac{1}{\frac{1}{1+x^2}}-1=x^2$$

よって, $\tan y=\pm x$. ここで, $y\in[0,\pi]$ かつ $\cos y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$ より, $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ゆえに, $\tan y=x$ となり, $y=\tan^{-1}x$.

(4) $y = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ とおく. このとき, $\tan y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. よって,

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+\frac{1-x^2}{x^2}} = x^2$$

よって, $\cos y = \pm x$. ここで, $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ かつ $\tan y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} > 0$ より, $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. ゆえに, $\cos y = x$ となり, $y = \cos^{-1} x$.

1.25.

(1) $(x^4)'' = (4x^3)' = 12x^2$

(2) $(3x^2)^{(3)} = (6x)'' = (6)' = 0$

(3) $(2x^3 + x^2)'' = (6x^2 + 2x)' = 12x + 2$

(4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(3)} = (x^{-1})^{(3)} = (-x^{-2})'' = (2x^{-3})' = -6x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4}$

(5) $(x\log x)'' = (\log x + 1)' = \dfrac{1}{x}$

(6) $(e^{\sin x})'' = (\cos x e^{\sin x})' = (\cos x)' e^{\sin x} + \cos x (e^{\sin x})' = (-\sin x + \cos^2 x)e^{\sin x}$

(7) $(x^{24})' = 24x^{23}$, $(x^{24})'' = (24x^{23})' = 24\cdot 23x^{22}$,
$(x^{24})^{(3)} = (24\cdot 23x^{22})' = 24\cdot 23\cdot 22x^{21}$, ...,
よって, $n \leqq 24$ ならば,

$$(x^{24})^{(n)} = 24\cdot 23\cdots(24-n+1)x^{24-n}$$

ゆえに, $(x^{24})^{(24)} = 24!$, $(x^{24})^{(25)} = 0$.

(8) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$, $(x^n)^{(3)} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,...,
よって, $(x^n)^{(n-1)} = n(n-1)\cdots(n-n+2)x^{n-n+1} = n!x$

(9) $(\sqrt{x})^{(3)} = (x^{\frac{1}{2}})^{(3)} = \left(\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)'' = \left(-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{8x^2\sqrt{x}}$

(10) $(e^{\frac{x}{2}})' = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $(e^{\frac{x}{2}})'' = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 e^{\frac{x}{2}}$, $(e^{\frac{x}{2}})^{(3)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 e^{\frac{x}{2}}$,...,
よって, $(e^{\frac{x}{2}})^{(7)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 e^{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{128}e^{\frac{x}{2}}$

(11) $\left(\dfrac{1}{x-1}\right)' = \{(x-1)^{-1}\}' = -(x-1)^{-2}$,
$\left(\dfrac{1}{x-1}\right)'' = \{-(x-1)^{-2}\}' = (-1)(-2)(x-1)^{-3}$,

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(3)} = \{(-1)(-2)(x-1)^{-3}\}' = (-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4},...,$$

よって,

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(10)} = (-1)(-2)\times\cdots\times(-10)(x-1)^{-11} = \frac{10!}{(x-1)^{11}}$$

(12) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1} = (x-2)^{-1} - (x-1)^{-1}$ である.
これより

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right\}' &= \{(x-2)^{-1} - (x-1)^{-1}\}' \\
&= -(x-2)^{-2} - (-1)(x-1)^{-2} \\
\left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right\}'' &= \{-(x-2)^{-2} - (-1)(x-1)^{-2}\}' \\
&= (-1)(-2)(x-2)^{-3} - (-1)(-2)(x-1)^{-3} \\
\left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right\}^{(3)} &= \{(-1)(-2)(x-2)^{-3} - (-1)(-2)(x-1)^{-3}\}' \\
&= (-1)(-2)(-3)(x-2)^{-4} - (-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4} \\
\left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right\}^{(4)} &= \{(-1)(-2)(-3)(x-2)^{-4} - (-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4}\}' \\
&= (-1)(-2)(-3)(-4)(x-2)^{-5} - (-1)(-2)(-3)(-4)(x-1)^{-5} \\
\left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right\}^{(5)} &= \{(-1)(-2)(-3)(-4)(x-2)^{-5} - (-1)(-2)(-3)(-4)(x-1)^{-5}\}' \\
&= (-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(x-2)^{-6} - (-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(x-1)^{-6} \\
&= \frac{120}{(x-1)^6} - \frac{120}{(x-2)^6}
\end{aligned}$$

1.26. 正しくは数学的帰納法で証明をする必要があるが, 本書のレベルでは, 規則性を見出した段階で結論付けてもよい.

(1) $(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$(\cos x)'' = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x+\pi)$,

$(\cos x)^{(3)} = -\sin(x+\pi) = \cos\left(x + \dfrac{3}{2}\pi\right)$,...,

よって,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$$

と予想できる. 以下, 数学的帰納法を用いてこれを示す.

$n=1$ のときは, 上記計算から正しいことが分かる. $n=k$ のときに予想が正しいと仮定して, $n=k+1$ のときに予想が正しいことを示す. $n=k$ の仮定から,

$$(\cos x)^{(k+1)} = \{(\cos x)^{(k)}\}' = \left\{\cos\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)\right\}'$$
$$= -\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right) = \cos\left(x+\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{k+1}{2}\pi\right)$$

よって, 数学的帰納法から, すべての $n=1,2,...$ に対して,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

となることが示された.

(2) $\{\log(1-x)\}' = -\dfrac{1}{1-x} = (x-1)^{-1}$,
$\{\log(1-x)\}'' = \{(x-1)^{-1}\}' = -(x-1)^{-2}$,
$\{\log(1-x)\}^{(3)} = \{(-1)(x-1)^{-2}\}' = (-1)(-2)(x-1)^{-3}$,
$\{\log(1-x)\}^{(4)} = \{(-1)(-2)(x-1)^{-3}\}' = (-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4}$,...,
よって,

$$\{\log(1-x)\}^{(n)} = (-1)(-2)\times\cdots\times(-n+1)(x-1)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$$

と予想できる. 以下, 数学的帰納法を用いてこれを示す.

$n=1$ のときは, 上記計算から正しいことが分かる. $n=k$ のときに予想が正しいと仮定して, $n=k+1$ のときに予想が正しいことを示す. $n=k$ の仮定から,

$$\begin{aligned}
(\log(1-x))^{(k+1)} &= \{(\log(1-x))^{(k)}\}' \\
&= \left\{\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x-1)^k}\right\}' \\
&= \left\{(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^{-k}\right\}' \\
&= -k\cdot(-1)^{k-1}(k-1)!(x-1)^{-k-1} = \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}}
\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法から, すべての $n=1,2,...$ に対して,

$$\{\log(1-x)\}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$$

となることが示された.

(3) $(e^{-x})' = -e^{-x}$, $(e^{-x})'' = (-1)^2 e^{-x}$, $(e^{-x})^{(3)} = (-1)^3 e^{-x}$,...,
よって, $(e^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$

(4) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,
$(\sqrt{x})'' = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$,

$$(\sqrt{x})^{(3)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}},$$
$$(\sqrt{x})^{(4)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}},...,$$

よって,

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})^{(n)} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)x^{-\frac{2n-1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!}x^{-\frac{2n-1}{2}}, \quad (n \geqq 2)\end{aligned}$$

と予想できる. 以下, 数学的帰納法を用いてこれを示す.

$n=2$ のときは, 上記計算から正しいことが分かる. $n=k$ のときに予想が正しいと仮定して, $n=k+1$ のときに予想が正しいことを示す. $n=k$ の仮定から,

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})^{(k+1)} &= \{(\sqrt{x})^{(k)}\}' \\ &= \left\{\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!}x^{-\frac{2k-1}{2}}\right\}' \\ &= -\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!}x^{-\frac{2k+1}{2}} \\ &= \frac{(2k-2)(2k-1)}{2^2(k-1)}\frac{(-1)^k(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!}x^{-\frac{2k+1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^k(2k-1)!}{2^{2k}(k-1)!}x^{-\frac{2k+1}{2}}\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法から, すべての $n=2,...$ に対して,

$$(\sqrt{x})^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!}x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

となることが示された. また, $n=1$ のときは $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ である.

(5) $(e^x\cos x)' = e^x\cos x - e^x\sin x = \sqrt{2}e^x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$(e^x\cos x)'' = \sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}^2e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(e^x\cos x)^{(3)} = \sqrt{2}^2e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2}^2e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}^3e^x\cos\left(x+\frac{3}{4}\pi\right),...,$$

よって, $(e^x\cos x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\dfrac{n}{4}\pi\right)$ と予想できる. 以下, 数学的帰納法を用いてこれを示す.

$n=1$ のときは, 上記計算から正しいことが分かる. $n=k$ のときに予想が正しいと仮定して, $n=k+1$ のときに予想が正しいことを示す. $n=k$ の

仮定から,

$$\begin{aligned}(e^x\cos x)^{(k+1)} &= \{(e^x\cos x)^{(k)}\}' \\ &= \left\{2^{\frac{k}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)\right\}' \\ &= 2^{\frac{k}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi\right) - 2^{\frac{k}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{k}{4}\pi\right) \\ &= 2^{\frac{k}{2}}e^x\cdot\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{k+1}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法から, すべての $n=1,2,...$ に対して,

$$(e^x\cos x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n}{4}\pi\right)$$

となることが示された.

(6) $\left(\dfrac{1}{x+2}\right)' = \{(x+2)^{-1}\}' = -(x+2)^{-2}$,
$\left(\dfrac{1}{x+2}\right)'' = \{-(x+2)^{-2}\}' = (-1)(-2)(x+2)^{-3}$,
$\left(\dfrac{1}{x+2}\right)^{(3)} = \{(-1)(-2)(x+2)^{-3}\}' = (-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4}$,...,
よって,

$$\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\times\cdots\times(-n)(x+2)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$$

と予想できる. 以下, 数学的帰納法を用いてこれを示す.

$n=1$ のときは, 上記計算から正しいことが分かる. $n=k$ のときに予想が正しいと仮定して, $n=k+1$ のときに予想が正しいことを示す. $n=k$ の仮定から,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(k+1)} &= \left\{\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(k)}\right\}' \\ &= \left\{\frac{(-1)^k k!}{(x+2)^{k+1}}\right\}' \\ &= \left\{(-1)^k k!(x+2)^{-(k+1)}\right\}' \\ &= -(k+1)\cdot(-1)^k k!(x+2)^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)!(x+2)^{-(k+2)} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(x+2)^{k+2}}\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法から, すべての $n=1,2,\dots$ に対して,

$$\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$$

となることが示された.

(7) $(x^2)'=2x$, $(x^2)''=2$, $(x^2)^{(n)}=0\ (n\geqq 3)$, $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$ より, ライプニッツの公式から,

$$\begin{aligned}(x^2\sin x)^{(n)}&=x^2(\sin x)^{(n)}+n(x^2)'(\sin x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2!}(x^2)''(\sin x)^{(n-2)}\\&\qquad+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(x^2)^{(3)}(\sin x)^{(n-3)}+\cdots\\&=x^2\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+2nx\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)\\&\qquad+n(n-1)\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right),\quad (n\geqq 2)\end{aligned}$$

また, $(x^2\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x=x^2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2x\sin x$.

(8) $(x^3)'=3x^2$, $(x^3)''=6x$, $(x^3)^{(3)}=6$, $(x^3)^{(n)}=0\ (n\geqq 4)$,
$(\log x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. よって, ライプニッツの公式から

$$\begin{aligned}(x^3\log x)^{(n)}&=x^3(\log x)^{(n)}+n(x^3)'(\log x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2!}(x^3)''(\log x)^{(n-2)}\\&\quad+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(x^3)^{(3)}(\log x)^{(n-3)}\\&\quad+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(x^3)^{(4)}(\log x)^{(n-4)}+\cdots\\&=x^3\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+3nx^2\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}\\&\quad+3n(n-1)x\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}+n(n-1)(n-2)\frac{(-1)^{n-4}(n-4)!}{x^{n-3}}\\&=\frac{(-1)^{n-4}(n-4)!}{x^{n-3}}\Big\{-(n-1)(n-2)(n-3)+3n(n-2)(n-3)\\&\quad-3n(n-1)(n-3)+n(n-1)(n-2)\Big\}\\&=\frac{(-1)^{n-4}6(n-4)!}{x^{n-3}}\quad (n\geqq 4)\end{aligned}$$

また, $(x^3\log x)'=3x^2\log x+x^2$, $(x^3\log x)''=6x\log x+5x$,
$(x^3\log x)^{(3)}=6\log x+11$.

(9) $(x)' = 1$, $(x)^{(n)} = 0$, $(n \geqq 2)$, また, $(e^{-2x})^{(n)} = (-2)^n e^{-2x}$ より, ライプニッツの公式から

$$\begin{aligned}(xe^{-2x})^{(n)} &= x(e^{-2x})^{(n)} + n(x)'(e^{-2x})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}(x)''(e^{-2x})^{(n-2)} + \cdots \\ &= (-2)^n xe^{-2x} + (-2)^{n-1} ne^{-2x} \\ &= (-2)^{n-1}(-2x+n)e^{-2x}\end{aligned}$$

(10) $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$ より,

$$\left\{\frac{1}{x(x-1)}\right\}^{(n)} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

ここで, $\dfrac{1}{x-1}$ や $\dfrac{1}{x}$ の n 次導関数は, (6) と同様の方法で求めた.

(11) $\cos(-x) = \cos x$ より,

$$\{\cos(-x)\}^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$$

ここで, $\cos x$ の n 次導関数は (1) と同様の方法で求めた.

(12) $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ より,

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{(n)} = \left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad (n \geqq 2)$$

ここで, $\dfrac{1}{x-1}$ の n 次導関数は, (6), (10) と同様の方法で求めた. また, $n = 1$ のときは, $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

1.27.

(1) $(x^2-1)f(x) = 1$ より, ライプニッツの公式を用いて両辺を n 回微分すると

$$\begin{aligned}0 &= \{(x^2-1)f(x)\}^{(n)} \\ &= (x^2-1)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x)\end{aligned}$$

よって, $x = 0$ を代入すると, $f^{(n)}(0) = n(n-1)f^{(n-2)}(0)$ を得る. また, $f^{(0)}(0) = f(0) = -1$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$ から $f'(0) = 0$ である. よって, n が

奇数のとき, $n = 2m-1$ とおくと,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= (2m-1)(2m-2)f^{(2m-3)}(0) \\ &= (2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)f^{(2m-5)}(0) \\ &= \cdots \\ &= (2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)\cdots(2m-2m+2)f^{(2m-2m+1)}(0) \\ &= n!f'(0) = 0 \end{aligned}$$

一方, n が偶数のとき, $n = 2m$ とおくと,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= 2m(2m-1)f^{(2m-2)}(0) \\ &= 2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)f^{(2m-4)}(0) \\ &= \cdots \\ &= 2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)\cdots(2m-2m+1)f^{(2m-2m)}(0) \\ &= n!f(0) = -n! \end{aligned}$$

まとめると, $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ -n! & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$

(2) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ より, $(1+x^2)f'(x) = 2x$. $n \geqq 3$ に対して, ライプニッツの公式を用いて両辺を $n-1$ 回微分すると

$$\begin{aligned} 0 &= \{(1+x^2)f(x)\}^{(n-1)} \\ &= (1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) \end{aligned}$$

よって, $x = 0$ を代入すると, $f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$ を得る. また, $f'(0) = 0$, $f^{(2)}(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ から $f^{(2)}(0) = 2$ である. よって, n が奇数のとき, $n = 2m-1$ とおくと,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= -(2m-2)(2m-3)f^{(2m-3)}(0) \\ &= (-1)^2(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)f^{(2m-5)}(0) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{m-1}(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)\cdots(2m-2m+1)f^{(2m-2m+1)}(0) \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!f'(0) = 0 \end{aligned}$$

一方, n が偶数のとき, $n = 2m$ とおくと,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= (-1)(2m-1)(2m-2)f^{(2m-2)}(0) \\ &= (-1)^2(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)f^{(2m-4)}(0) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{m-1}(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)\cdots(2m-2m+2)f^{(2m-2m+2)}(0) \\ &= (-1)^{\frac{n-2}{2}}(n-1)!f^{(2)}(0) = (-1)^{\frac{n-2}{2}}2(n-1)! \end{aligned}$$

まとめると, $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}} 2(n-1)! & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$

1.28.

(1) $y' = \cos x$ より, $y = \sin x$ の点 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Longleftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

法線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Longleftrightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(2) $y' = \dfrac{1}{x}$ より, $y = \log x$ の点 $(1,0)$ における接線の方程式は $y = x - 1$
法線の方程式は

$$y = -(x-1) \Longleftrightarrow y = -x + 1$$

(3) $y' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ より, $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ の点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{4}{5} = -\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{4})^2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow y = -\frac{16}{25}x + \frac{28}{25}$$

法線の方程式は

$$y - \frac{4}{5} = \frac{25}{16}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow y = \frac{25}{16}x + \frac{3}{160}$$

(4) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より, $y = \tan x$ の点 $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$ における接線の方程式は

$$y - 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$$

法線の方程式は

$$y - 1 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\pi}{8}$$

(5) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1$ より, $y = \sqrt{x} + x - 1$ の点 $(1,1)$ における接線の方程式は

$$y - 1 = \left(\frac{1}{2} + 1\right)(x-1) \Longleftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

法線の方程式は

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x-1) \Longleftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

(6) $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ より，$y = \dfrac{\sin x}{x}$ の点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2}{\pi}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{2}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}}{(\frac{\pi}{2})^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow y = -\frac{4}{\pi^2}x + \frac{4}{\pi}$$

法線の方程式は

$$y - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow y = \frac{\pi^2}{4}x + \frac{2}{\pi} - \frac{\pi^3}{8}$$

1.29. ロピタルの定理を使えばよい．

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sqrt{1+x^2}-1)'} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 1\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right)'}{(\frac{1}{x})'} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0\end{aligned}$$

(4) 最初に $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x^{\frac{1}{x}}$ を求める．

$$\lim_{x\to\infty}\log x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}e^{\log x^{\frac{1}{x}}} = e^0 = 1.$

(5) 最初に $\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ を求める.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\{\log(\cos x)\}'}{(x^2)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(-\frac{1}{2\cos x}\right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって, $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

(6) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos 3x}{\log\cos 2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\log\cos 3x)'}{(\log\cos 2x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3\sin 3x}{\cos 3x}}{-\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x\cos 2x}{2\sin 2x\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin 3x}{x}\cos 2x}{2\frac{\sin 2x}{x}\cos 3x} = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

(7) 最初に $\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ を求める.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left\{\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)\right\}'}{(x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^x\log 2+3^x\log 3}{2}}{\frac{2^x+3^x}{2}} = \frac{\log 2+\log 3}{2} = \log\sqrt{6}\end{aligned}$$

よって, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\log\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

(8) ロピタルの定理を 3 回使えばよい.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^3e^{-2x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^3)'}{(e^{2x})'}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2)'}{(2e^{2x})'}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{4e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(6x)'}{(4e^{2x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{8e^{2x}} = 0\end{aligned}$$

(9) 最初に $\displaystyle\lim_{x\to0+}\log x^{\sin x}$ を求める.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\log x^{\sin x} &= \lim_{x\to0+}\sin x\log x\\ &= \lim_{x\to0+}\frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}}\\ &= \lim_{x\to0+}\frac{(\log x)'}{(\frac{1}{\sin x})'} = \lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to0+}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = 0\end{aligned}$$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to0+}x^{\sin x} = \lim_{x\to0+}e^{\log x^{\sin x}} = e^0 = 1.$

1.30.

(1) $y = x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ より,

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}} = \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

よって, $x = \dfrac{1}{2}$ のとき $y' = 0$ となる. また, 増減表は以下の通りである.

x	0		$\frac{1}{2}$		0
y'	$\diagdown$	$+$	0	$-$	$\diagdown$
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

よって, $x = \dfrac{1}{2}$ のとき極大で, 極大値は $\dfrac{1}{2}$.

(2) $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$. $y' = \dfrac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = -\dfrac{e^{2x}-1}{e^x(e^x+e^{-x})^2}$ より, $x = 0$ のとき $y' = 0$. よって, 増減表は以下の通りになる.

x		0	
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$

よって, $x=0$ のとき極大で, 極大値は $\dfrac{1}{2}$.

(3) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ より

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0.$$

よって, $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ は単調増加関数で, 極値を持たない.

(4) $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x}=x+3+\dfrac{1}{x}$ より $y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$. よって, $x=\pm 1$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	$\diagdown$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\diagdown$	$\searrow$	5	$\nearrow$

よって, $x=-1$ のとき極大で, 極大値は 1, $x=1$ のとき極小で, 極小値は 5.

(5) $y=\dfrac{\log x}{x}$ より $y'=\dfrac{1-\log x}{x^2}$. よって, $x=e$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下の通りである.

x	0		e	
y'	$\diagdown$	$+$	0	$-$
y	$\diagdown$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

よって, $x=e$ のとき極大で, 極大値は $\dfrac{1}{e}$.

(6) 最初に, 定義域は $x \geqq 0$ であることに注意しよう. $y=2x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}=2x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}$ より $y'=5x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{-1}{2}}=\dfrac{5x^2-1}{\sqrt{x}}$. よって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	
y'	$\diagdown$	$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{8}{5\sqrt[4]{5}}$	$\nearrow$

よって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき極小で, 極小値は $-\dfrac{8}{5\sqrt[4]{5}}$.

(7) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ より $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. よって $x=\pm 1$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-1		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$

よって, $x=-1$ のとき極小で, 極小値は $-\dfrac{1}{2}$, $x=1$ のとき極大で, 極大値は $\dfrac{1}{2}$.

(8) $y=x-2\sqrt{x}$ より $y'=1-x^{\frac{-1}{2}}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$. よって, $x=1$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x	0		1	
y'		$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって, $x=1$ のとき極小で, 極小値は -1.

(9) $y=x-\log(x^2+1)$, $y'=1-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\geqq 0$. よって, 関数 $y=x-\log(x^2+1)$ は単調増加関数で極値を持たない.

(10) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ より $y'=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. よって, $x=0$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		0	
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$

よって, $x=0$ のとき極大で, 極大値は 1.

(11) $y=(2x-3)\sqrt{x}$ より $y'=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}(2x-3)\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{3(2x-1)}{2\sqrt{x}}$. よって, $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x	0		$\dfrac{1}{2}$	
y'		$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$

よって, $x=\dfrac{1}{2}$ のとき極小で, 極小値は $-\sqrt{2}$.

(12) $y=x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$ より $y'=2x-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$. よって, $x=\pm1$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-1		0		1	
y'	$-$	0	$+$	$\diagdown$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\diagdown$	$\nearrow$	3	$\searrow$

よって, $x=\pm1$ のとき極小で, 極小値は 3.

(13) $y=x^x$. 両辺の対数をとると $\log y=x\log x$. ここで両辺を x で微分すると $\dfrac{y'}{y}=\log x+1$. よって $y'=x^x(\log x+1)$. よって, $x=\dfrac{1}{e}$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x	0		$\frac{1}{e}$	
y'	$\diagdown$	$-$	0	$+$
y	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$

よって, $x=\dfrac{1}{e}$ のとき極小で, 極小値は $e^{-\frac{1}{e}}$. ($\displaystyle\lim_{x\to0+}x^x=1$ に注意.)

(14) $y=x\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{-1}{2}}$ より $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}$. よって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
y'	$\diagdown$	$-$	0	$+$
y	$\diagdown$	$\searrow$	$\frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$	$\nearrow$

よって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極小で, 極小値は $\dfrac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$.

(15) $y=x^3+3x^2-9x+2$ より $y'=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$. よって, $x=-3,1$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-3		1	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	29	$\searrow$	-3	$\nearrow$

よって, $x=-3$ のとき極大で, 極大値は 29, $x=1$ のとき極小で, 極小値は -3.

(16) $y=2x^3-9x^2+12x$ より $y'=6x^2-18x+12=6(x-2)(x-1)$. よって, $x=1,2$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		1		2	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$

よって, $x=1$ のとき極大で, 極大値は 5, $x=2$ のとき極小で, 極小値は 4.

(17) $y=x^4-18x^2+3$ より $y'=4x^3-36x=4x(x^2-9)$. よって, $x=0,\pm3$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-3		0		3	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-78	$\nearrow$	3	$\searrow$	-78	$\nearrow$

よって, $x=\pm3$ のとき極小で, 極小値は -78, $x=0$ のとき極大で, 極大値は 3.

1.31.

(1) $y=x^2-6x-1$ より $y'=2x-6$, $y''=2>0$. よって, $x=3$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		3	
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$		$+$
y	$\searrow$	-10	$\nearrow$

(2) $y=-x^2+4x+3$ より $y'=-2x+4$, $y''=-2<0$. よって, $x=2$ のとき $y'=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		2	
y'	$+$	0	$-$
y''	$-$		$-$
y	$\nearrow$	7	$\searrow$

(3) $y=x^3$ より $y'=3x^2\geqq 0$, $y''=6x$. よって, $x=0$ のとき $y'=y''=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		0	
y'	$+$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$

(4) $y=x^3-6x^2+5$ より $y'=3x^2-12x=3x(x-4)$, $y''=6x-12$. よって, $x=0,4$ のとき $y'=0$, $x=2$ のとき $y''=0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		0		2		4	
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y	$\nearrow$	5	$\searrow$	-11	$\searrow$	-27	$\nearrow$

(5) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ より $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$, $y'' = -6x + 6$. よって, $x = 0, 2$ のとき $y' = 0$, $x = 1$ のとき $y'' = 0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		0		1		2	
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	5	$\nearrow$

(6) $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ より $y' = 3x^2 + 4x + 1 = (x+1)(3x+1)$, $y'' = 6x + 4$. よって, $x = -1, -\dfrac{1}{3}$ のとき $y' = 0$, $x = -\dfrac{2}{3}$ のとき $y'' = 0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-1		$-\dfrac{2}{3}$		$-\dfrac{1}{3}$	
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\dfrac{79}{27}$	$\searrow$	$\dfrac{77}{27}$	$\nearrow$

(7) $y = x^4 + 2x^3 + 1$ より $y' = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3)$, $y'' = 12x^2 + 12x = 12x(x+1)$. よって, $x = -\dfrac{3}{2}, 0$ のとき $y' = 0$, $x = -1, 0$ のとき $y'' = 0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		$-\dfrac{3}{2}$		-1		0	
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$
y''	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$-\dfrac{11}{16}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

(8) $y = -x^4 + 3x^2 + 1$ より $y' = -4x^3 + 6x = -2x(2x^2 - 3)$, $y'' = -12x^2 + 6 = -6(2x^2 - 1)$. よって, $x = 0, \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ のとき $y' = 0$, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $y'' = 0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↗	$\frac{13}{4}$	↘	$\frac{9}{4}$	↘	1	↗	$\frac{9}{4}$	↗	$\frac{13}{4}$	↘

(9) $y = x^4 - 14x^2 + 24x - 3$ より $y' = 4x^3 - 28x + 24 = 4(x-1)(x-2)(x+3)$, $y'' = 12x^2 - 28 = 4(3x^2 - 7)$. よって, $x = -3, 1, 2$ のとき $y' = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ のとき $y'' = 0$ となる. 増減表は以下のとおりである.

x		-3		$-\sqrt{\frac{7}{3}}$		1		$\sqrt{\frac{7}{3}}$		2	
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y	↘	-120	↗	$-\frac{272}{9} - 8\sqrt{21}$	↗	8	↘	$-\frac{272}{9} + 8\sqrt{21}$	↘	5	↗

(10) $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ より, $y' = \frac{1}{3}(x^3 + x^2)^{\frac{-2}{3}}(3x^2 + 2x) = \frac{3x + 2}{3x^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}}$ より, $x = -\frac{2}{3}$ のとき, $y' = 0$ また,

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x^3 + x^2)^{-\frac{5}{3}}(3x^2 + 2x)^2 + \frac{1}{3}(x^3 + x^2)^{-\frac{2}{3}}(6x + 2) \\
&= -\frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}} < 0
\end{aligned}
$$

よって, 増減表は以下の通りになる.

x	-1		$-\frac{2}{3}$		0		1
y'	╲	$+$	0	$-$	╲	$+$	
y''	╲	$-$		$-$	╲	$-$	
y	0	↗	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↘	0	↗	$\sqrt[3]{2}$

(11) $y = \frac{x}{(x+1)^2}$ より, $y' = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{x-1}{(x+1)^3}$ より, $x = 1$ のとき $y' = 0$. また,

$$
y'' = -\frac{(x+1)^3 - 3(x-1)(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{2(x-2)}{(x+1)^4}
$$

より, $x=2$ のとき $y''=0$.

よって, 増減表は以下の通りになる.

x		-1		1		2	
y'	$-$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$-$		$-$		$-$	0	$+$
y	↘		↗	$\frac{1}{4}$	↘	$\frac{2}{9}$	↘

1.32.

(1) e^x と e^{-x} のマクローリン展開を 3 次まで求めて, 足し合わせればよい.

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)+\left(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)\right\}$$
$$=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots$$

よって, $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の 3 次までのマクローリン展開は $1+\dfrac{1}{2}x^2$.

(2) $(x+3)^4=3^4+4\cdot 3^3x+\dfrac{4\cdot 3}{2!}3^2x^2+\dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}3\cdot x^3+x^4$
$\qquad=81+108x+54x^2+12x^3+x^4$

よって, $(x+3)^4$ の 3 次までのマクローリン展開は $81+108x+54x^2+12x^3$.

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$
$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(-x)^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(-x)^3+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\cdots$$

よって, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の 3 次までのマクローリン展開は $1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{5}{16}x^3$.

(4) $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots$ より,

$$\tan^{-1}x=\int_0^x(1-x^2+x^4+\cdots)dx=x-\frac{1}{3}x^3+\cdots$$

よって, $\tan^{-1}x$ の 3 次までのマクローリン展開は $x-\dfrac{1}{3}x^3$.

(5) $(x-1)^2=1-2x+x^2$ より, $(x-1)^2$ の 3 次までのマクローリン展開は $1-2x+x^2$.

(6) $2^x = e^{\log 2^x} = e^{(\log 2)x} = 1 + (\log 2)x + \dfrac{(\log 2)^2}{2!}x^2 + \dfrac{(\log 2)^3}{3!}x^3 + \cdots$ より,
2^x の 3 次までのマクローリン展開は $1 + (\log 2)x + \dfrac{(\log 2)^2}{2}x^2 + \dfrac{(\log 2)^3}{6}x^3$.

(7) e^x と $\cos x$ のマクローリン展開をそれぞれ掛け合わせて展開すればよい.

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{2!} + \cdots \\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots \end{aligned}$$

よって, $e^x \cos x$ の 3 次までのマクローリン展開は $1 + x - \dfrac{1}{3}x^3$.

(8) $f(x) = \log(e^x + 1)$ とおく. $f(0) = \log 2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ より}, f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(x) &= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \text{ より}, f''(0) = \frac{1}{4} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^3} \text{ より}, f^{(3)}(0) = 0 \end{aligned}$$

よって, $\log(e^x + 1)$ の 3 次までのマクローリン展開は $\log 2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}x^2$.

(9) $\dfrac{1}{1 - x}$ のマクローリン展開を求め, x に $\sin x$ のマクローリン展開を代入すればよい.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \sin x} &= 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \cdots \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + (x + \cdots)^2 + (x + \cdots)^3 + \cdots \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

よって, $\dfrac{1}{1 - \sin x}$ の 3 次までのマクローリン展開は $1 + x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3$.

(10) $f(x) = e^{\cos x}$ とおく. $f(0) = e$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x e^{\cos x} \text{ より}, f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x e^{\cos x} + \sin^2 x e^{\cos x} \text{ より}, f''(0) = -e \\ f^{(3)}(x) &= \sin x e^{\cos x}\left(1 + \cos x - \sin^2 x\right) \text{ より}, f^{(3)}(0) = 0 \end{aligned}$$

よって, $e^{\cos x}$ の 3 次までのマクローリン展開は $e - \dfrac{e}{2}x^2$.

(11) $(e^x-1)^4$ を展開して, $e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}$ のマクローリン展開をそれぞれ代入すればよい.

$$
\begin{aligned}
&(e^x-1)^4\\
&=1-4e^x+6e^{2x}-4e^{3x}+e^{4x}\\
&=1-4\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)+6\left(1+2x+\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^3}{3!}x^3+\cdots\right)\\
&\qquad-4\left(1+3x+\frac{3^2}{2!}x^2+\frac{3^3}{3!}x^3+\cdots\right)+\left(1+4x+\frac{4^2}{2!}x^2+\frac{4^3}{3!}x^3+\cdots\right)\\
&=0+\cdots
\end{aligned}
$$

よって, $(e^x-1)^4$ の 3 次までのマクローリン展開は 0.

(12) $f(x)=\tan x$ とおく. $f(0)=0$.

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{\cos^2 x} \text{ より, } f'(0)=1\\
f''(x)&=\frac{2\sin x}{\cos^3 x} \text{ より, } f''(0)=0\\
f^{(3)}(x)&=\frac{2\cos^2 x+6\sin^2 x}{\cos^4 x} \text{ より, } f^{(3)}(0)=2
\end{aligned}
$$

よって, $\tan x$ の 3 次までのマクローリン展開は $x+\dfrac{1}{3}x^3$.

1.33.

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$ より,

$$e^{0.1}=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{200}+\frac{1}{6000}=\frac{6631}{6000}=1.105$$

また, 誤差は

$$\sup_{x\in[0,0.1]}\frac{|e^x|}{4!}\cdot 0.1^4\leq\frac{3}{4!}\cdot 0.1^4=\frac{1}{80000}=0.0000125$$

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$ より,

$$\sin 0.1=\frac{1}{10}-\frac{1}{6000}=\frac{599}{6000}=0.1$$

また, 誤差は

$$\sup_{x\in[0,0.1]}\frac{|\sin x^x|}{4!}\cdot 0.1^4\leq\frac{1}{4!}\cdot 0.1^4=\frac{1}{240000}=0.00000417$$

1.34.

(1) $\sin x$ のマクローリン展開に x^2 を掛ければよい.

$$x^2 \sin x = x^2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{(2n-3)!} x^{2n-3} + \cdots \right)$$
$$= x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} - \frac{x^9}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{(2n-3)!} x^{2n-1} + \cdots$$

よって, $x^2 \sin x$ の $2n$ 次までのマクローリン展開は

$$x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} - \frac{x^9}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{(2n-3)!} x^{2n-1}$$

(2) e^x のマクローリン展開において, x を $2x$ に置き換えればよい.

$$e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n!} + \cdots$$
$$= 1 + 2x + \frac{2^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{2^n}{n!} x^n + \cdots$$

よって, e^{2x} の n 次までのマクローリン展開は

$$1 + 2x + \frac{2^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{2^n}{n!} x^n$$

(3) $\dfrac{x}{1-x^2}$ のマクローリン展開に x を掛ければよい.

$$\frac{x}{1-x^2} = x\left(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2} + \cdots\right)$$
$$= x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n-1} + \cdots$$

よって, $\dfrac{x}{1-x^2}$ の $2n$ 次までのマクローリン展開は

$$x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n-1}$$

(4) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$ より,

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx$$
$$= \int_0^x \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots\right) dx$$
$$= \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots \right]_0^x$$
$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots$$

よって, $\tan^{-1} x$ の $2n+1$ 次までのマクローリン展開は

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

(5) $3^x = e^{(\log 3)x} = 1 + (\log 3)x + \dfrac{(\log 3)^2}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{(\log 3)^n}{n!}x^n + \cdots$. よって, 3^x の n 次までのマクローリン展開は

$$1 + (\log 3)x + \frac{(\log 3)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(\log 3)^n}{n!}x^n$$

1.35.

(1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots) - (1 + x^2 + x^4 + \cdots)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{3}{2} - \frac{23}{24}x^2 + \cdots\right) = -\frac{3}{2}$$

(2)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x\sqrt{x+1}}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots)}{x^3} - \frac{x(1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \cdots)}{x^3}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{24}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + \cdots}{x^3} = \frac{7}{24}$$

(3)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1 + x + x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots}{1 + x + x^2}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}x + \cdots}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} = +\infty$$

(4)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan^{-1} x}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots) - (x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \cdots)}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} - \frac{23}{120}x^2 + \cdots\right) = \frac{1}{6}$$

(5)
$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1 - (\log 2)x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + (\log 2)x + \frac{(\log 2)^2}{2!}x^2 + \frac{(\log 2)^3}{3!}x^3 \cdots - 1 - (\log 2)x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{(\log 2)^2}{2} + \frac{(\log 2)^3}{6}x \cdots\right\} = \frac{(\log 2)^2}{2}$$

(6)
$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\log(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\{1 + (\log 2)x + \frac{(\log 2)^2}{2}x^2 + \cdots\} - 1}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log 2 + \frac{(\log 2)^2}{2}x + \cdots}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \cdots} = \log 2$$

1.36. e が有理数だと仮定して矛盾を導く. e が有理数だと仮定すると, $e = \dfrac{k}{m}$ とおくことができる. ここで, $\dfrac{k}{m}$ は既約分数であると仮定する.

e^x の n 次までのマクローリン展開から

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\alpha}{(n+1)!}x^{n+1}$$

をみたす α が 0 と x の間に存在する. これより,

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\alpha}{(n+1)!}$$

となる $\alpha \in [0,1]$ が存在する. これより,

$$n!e = n!\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \frac{e^\alpha}{n+1}$$

を得る. ここで, $n \geqq m$ とすれば, 左辺は整数になる. これより右辺も整数である. すなわち, $n \geqq m$ となる全ての n に対して, $\dfrac{e^\alpha}{n+1}$ は整数となる. ところで, $\alpha \in [0,1]$ であったので, $1 \leqq e^\alpha \leqq 3$, すなわち,

$$\frac{1}{n+1} \leqq \frac{e^\alpha}{n+1} \leqq \frac{3}{n+1}$$

が成り立つ. これより, 全ての $n \geqq m$ に対して, $\dfrac{e^\alpha}{n+1}$ が整数になることはない. よって, $\dfrac{e^\alpha}{n+1}$ が整数であることに矛盾するので, e は有理数ではない.