８．生産関数と潜在GDP

経済統計分析
（2015年度秋学期）

到達目標

1．両対数型（コブ･ダグラス型）の関数の推定ができ、係数の意味を解釈できる

2. トレンド変数、ダミー変数を用いた推定ができる

3．推定結果に関する仮説検定ができる

4．両対数型の推定結果を用いた要因分解や予測シミュレーションができる

生産関数と潜在GDP

（経済理論との関係）

- 生産関数とは何か？
- 労働、資本の限界生産力
- 技術水準と生産性
- コブ･ダグラス型生産関数
- 競争的賃金設定の検証 ― 労働市場は競争的か ―
- 規模の収穫（一定／逓増／逓減）の検証
- 成長会計
- 潜在GDP、潜在成長率、GDPギャップ

生産関数と潜在GDP

（計量分析手法）

- 関数形の選択：両対数モデルと弾力性
- トレンド変数
- ダミー変数
- 仮説検定
- 予測シミュレーション
- 推定結果に基づく要因分解

生産関数

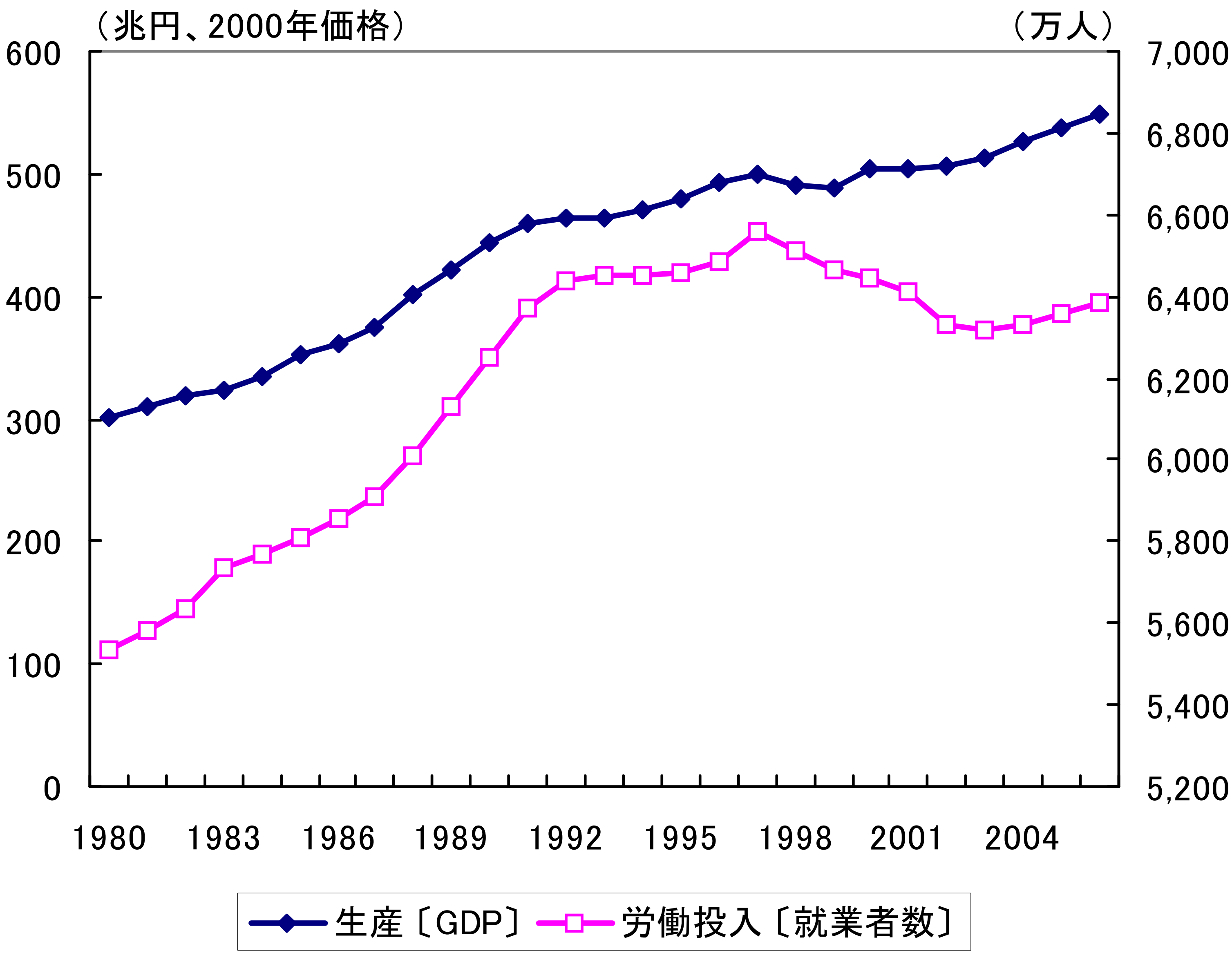
- 生産関数とは何か：
  投入（労働、資本）→ 産出（生産）　の関係を表す
- 生産関数（一般的な形）

  $$Y = \mathrm{F}(A, L, K)$$

  Y: 生産, A: 生産技術水準, L: 労働投入, K: 資本投入

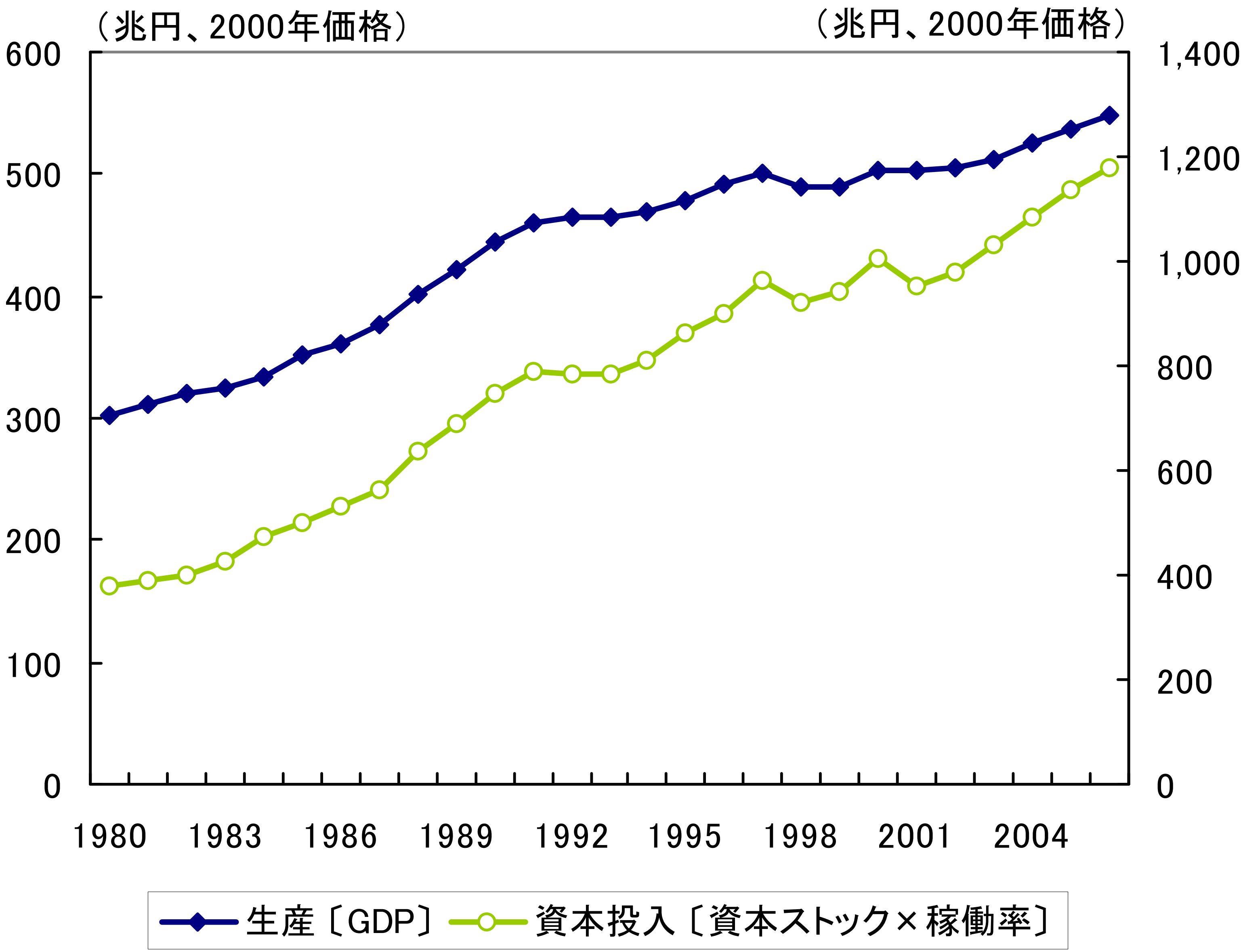
  ※ 関数 F の形として何を選ぶか？
  （例）線型、コブ･ダグラス型、CES型
- 限界生産力
  - 労働の限界生産力（労働力を1人追加したら生産がどれだけ増えるか）･･･$\partial Y/\partial L$
  - 資本の限界生産力（資本を1単位追加したら生産がどれだけ増えるか）･･･$\partial Y/\partial K$
- 競争的環境での利潤最大化条件
  - 賃金＝労働の限界生産力（$w = \partial Y/\partial L$）
  - 資本コスト＝資本の限界生産力（$r = \partial Y/\partial K$）

労働投入（就業者数）と生産（GDP）



（データ）内閣府「国民経済計算」、総務省「労働力調査」

資本投入と生産



（データ）内閣府「国民経済計算」、経済産業省「鉱工業指数」

生産関数の形状① 線型

線型の生産関数

$$Y = \mathrm{F}(A, L, K)$$
$$= A + \beta_1 L + \beta_2 K$$

（特性）

- 労働の係数（β_1）は労働の限界生産力を表す（$\beta_1 = \partial Y / \partial L$）
  〔労働力を1人増やしたら生産がβ_1 増える〕
- 資本の係数（β_2）は資本の限界生産力を表す（$\beta_2 = \partial Y / \partial K$）
  〔資本を1単位増やしたら生産がβ_2 増える〕
- 労働の限界生産力一定（＝労働に関する収穫一定）
- 資本の限界生産力一定（＝資本に関する収穫一定）

線型の生産関数の推定

- 線型の生産関数

$$Y = A + \beta_1 L + \beta_2 K$$

※ 技術水準 A をどう測るか？

(1) 技術水準一定（A_t=α）と仮定〔定数項αとして推定〕

推定式： $Y_t = \alpha + \beta_1 L_t + \beta_2 K_t$

(2) 毎年一定（γ）の技術進歩を仮定
〔定数項＋トレンド変数（後述）: A_t=α +γ T_tとして推定〕

推定式： $Y_t = \alpha + \gamma T_t + \beta_1 L_t + \beta_2 K_t$

生産関数の推定結果（線型、技術進歩なし）

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Sample: 1980 2006
Included observations: 27

技術水準、労働、資本の係数の推定値

Variable	Coefficient		istic	Prob.
C	-151.4099	34.95637	-4.331398	0.0002
L	0.066458	0.006601	10.06862	0.0000
K	0.234145	0.008848	26.46390	0.0000

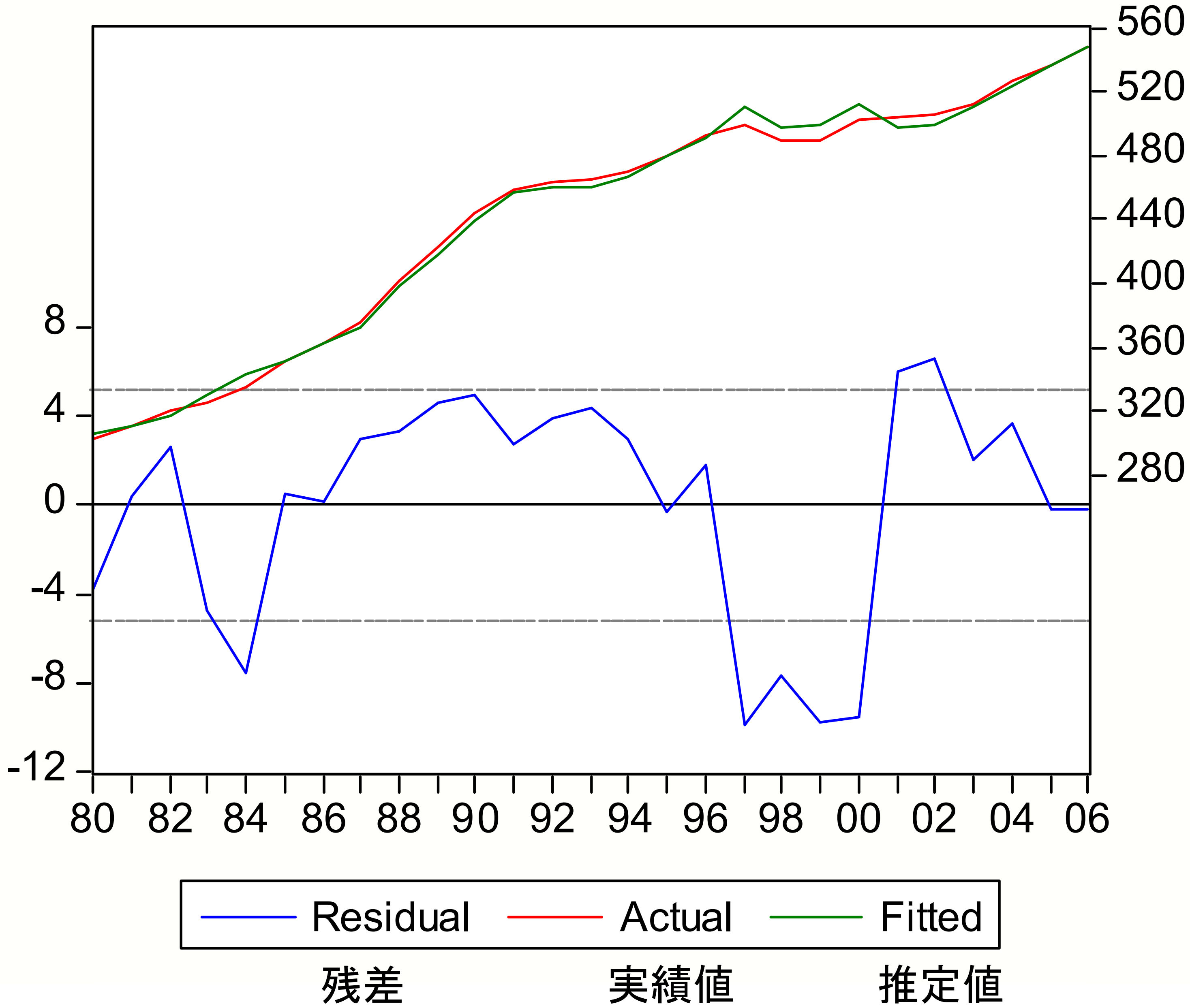
R-squared	0.995806	Mean dependent var	440.4704
Adjusted R-squared	0.995456	S.D. ...endent var	77.47169
S.E. of regression	5.222255	Akaik	6.248175
Sum squared resid	654.5268	Schw	6.392157
Log likelihood	-81.35036	F-statistic	2848.969
Durbin-Watson stat	0.923458	Prob(F-statistic)	0.000000

生産Yの動きの99%以上を説明

推定結果の分析・解釈

- 労働 L の係数 β_1= $\boxed{}$
  - 労働の限界生産力:
    1万人労働力を増やすと $\boxed{}$ 兆円生産が増加
    (＝1人労働力を増やすと $\boxed{}$ 万円生産が増加)
  - 日本の平均所得(平成17年税務統計)
    民間給与所得437万円、申告納税者527万円
    ※ 企業は生産力に応じた賃金を支払っているか？
- 資本 K の係数 β_2= $\boxed{}$
  - 資本の限界生産力:
    資本に1兆円投資すると、$\boxed{}$ 兆円生産が増加
  - 資本コスト＝金利＋減価償却率
    金利3～5%として、投資の回収期間5～6年程度に相当

生産関数の推定結果（線型、技術進歩なし）



技術進歩とトレンド変数

- トレンド変数・・・時間とともに一定的に増える変数

（例）

	1980	1981	1982	・・・	2002	2003
Trend1	1	2	3	・・・	23	24
Trend2	80	81	82	・・・	102	103

- トレンド変数を活用する場合
  - 時間とともに趨勢的に増える/減るが、直接観察できない変数（例：技術進歩、社会情勢の変化等）の代理変数として用いる

- トレンド変数による技術進歩の定式化

推定式： $Y_t = \alpha + \gamma T_t + \beta_1 L_t + \beta_2 K_t$

・・・ T が1増えると（＝1年経つと）、生産が γ だけ増加

＝毎年一定（γ）の技術進歩を想定

生産関数の推定結果（線型、毎年一定トレンドの技術進歩）

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Sample: 1980 2006
Included observations: 27

ただしt値が低い（有意でない）＝技術進歩なしと考えてもおかしくない

毎年0.51兆円生産が増加

Variable	C[illegible]	[illegible]rror	t-Statistic	[illegible]rob.
C	-157[illegible]138	37.47730	-4.208248	0.0003
T	0.510117	0.972863	0.524346	0.6051
L	0.068690	0.007940	8.651282	0.0000
K	0.215197	0.037237	5.779152	0.0000

R-squared	0.995855	Mean dependent var	440.4704
Adjusted R-squared	0.995315	S.D. de[illegible]	[illegible]
S.E. of regression	5.302973	Akai[illegible]	[illegible]
Sum squared resid	646.7951	Schwa[illegible]	[illegible]
Log likelihood	-81.18994	F-statis[illegible]	[illegible]
Durbin-Watson stat	0.826776	Prob(F-statistic)	0.000000

自由度修正済決定係数も低下＝トレンド変数を加えても説明力は向上しない

線型の生産関数の問題点

- 労働に関する収穫一定

  ＝資本投入が同量のままで、労働投入だけ増やした場合でも、生産が一定割合で増え続ける

- 資本に関する収穫一定

  ＝労働投入が同量のままで、資本投入だけ増やした場合でも、生産が一定割合で増え続ける

⇒ 現実的か？

生産関数の形状② コブ･ダグラス型

コブ･ダグラス型生産関数

$$Y = AL^{\beta_1}K^{\beta_2}$$

（特性）

- 労働に関する収穫〔労働投入だけ増やした場合〕:
  逓減（$\beta_1 < 1$のとき）
- 資本に関する収穫〔資本投入だけ増やした場合〕:
  逓減（$\beta_2 < 1$のとき）
- 規模に関する収穫〔労働･資本を同じ割合で増やした場合〕:
  - 逓増（$\beta_1 + \beta_2 > 1$のとき）
  - 一定（$\beta_1 + \beta_2 = 1$のとき）
  - 逓減（$\beta_1 + \beta_2 < 1$のとき）

※ 労働、資本を2倍（n倍）したときに
生産が何倍に増えるか確かめよ
・労働だけ増やした場合
・資本だけ増やした場合
・労働･資本ともに増やした場合

コブ・ダグラス型生産関数の特性(続)

- β_1は労働に対する生産の<u>弾力性</u>を表す

〔＝労働投入を1<u>%</u>増やすと生産がβ_1<u>%</u>増える〕

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta_1 A L^{\beta_1 - 1} K^{\beta_2} = \beta_1 \frac{A L^{\beta_1} K^{\beta_2}}{L} = \beta_1 \frac{Y}{L}$$

$$\therefore \beta_1 = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} = \frac{\partial Y / Y}{\partial L / L}$$

- β_2は資本に対する生産の<u>弾力性</u>を表す

〔＝資本投入を1<u>%</u>増やすと生産がβ_2<u>%</u>増える〕

$$\beta_2 = \frac{\partial Y / Y}{\partial K / K}$$

※「生産の弾力性」と「限界生産力」の違いは？

コブ･ダグラス型生産関数の特性(続)

- 成長率の要因分解(成長会計)
  - パラメターβ_1, β_2を用いて以下のように要因分解できる

$$\underbrace{\frac{\Delta Y}{Y}}_{\text{生産の成長率}} = \underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{\text{技術進歩要因}} + \beta_1 \underbrace{\frac{\Delta L}{L}}_{\text{労働増加要因}} + \beta_2 \underbrace{\frac{\Delta K}{K}}_{\text{資本増加要因}}$$

- 賃金設定と労働分配率
  - 賃金wが競争的に設定されているとき(=労働市場が競争的なとき)、β_1は労働分配率に等しくなる

$$\beta_1 = \frac{wL}{Y}$$

✍（証明）成長率の要因分解

- コブ・ダグラス型生産関数

$$Y = AL^{\beta_1}K^{\beta_2}$$

- 全微分して

$$\begin{aligned}
dY &= \frac{\partial Y}{\partial A}dA + \frac{\partial Y}{\partial L}dL + \frac{\partial Y}{\partial K}dK \\
&= (L^{\beta_1}K^{\beta_2})dA + (\beta_1 AL^{\beta_1 - 1}K^{\beta_2})dL + (\beta_2 AL^{\beta_1}K^{\beta_2 - 1})dK \\
&= \frac{Y}{A}dA + \beta_1\frac{Y}{L}dL + \beta_2\frac{Y}{K}dK
\end{aligned}$$

- 両辺をYで割れば

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \beta_1\frac{dL}{L} + \beta_2\frac{dK}{K}$$

✍（証明）賃金設定と労働分配率

- コブ･ダグラス型生産関数

$$Y = AL^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

- 競争的賃金設定･･･賃金が労働の限界生産力に等しい

$$w = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta_1 A L^{\beta_1 - 1} K^{\beta_2} = \beta_1 \frac{Y}{L}$$

- このとき労働分配率は

$$\frac{wL}{Y} = \beta_1$$

コブ・ダグラス型生産関数の推定

- コブ・ダグラス型生産関数

$$Y = AL^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

- 両辺対数をとれば

$$\ln Y = \ln(AL^{\beta_1} K^{\beta_2})$$

$$= \ln A + \ln L^{\beta_1} + \ln K^{\beta_2}$$

$$= \ln A + \beta_1 \ln L + \beta_2 \ln K$$

- 推定式（両対数型）
  - 技術水準一定（$\ln A_t = \alpha$）

$$\ln Y_t = \alpha + \beta_1 \ln L_t + \beta_2 \ln K_t + \varepsilon_t$$

  - 技術進歩率一定（$\ln A_t = \alpha + \gamma T_t$）

$$\ln Y_t = \alpha + \gamma T_t + \beta_1 \ln L_t + \beta_2 \ln K_t + \varepsilon_t$$

コブ･ダグラス型生産関数の推定結果①（技術水準一定）

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Sample: 1980 2006
Included observations: 27

労働、資本に対する生産の弾力性

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.330198	0.843517	-2.762479	0.0108
LOG(L)	0.630996	0.108168	5.833473	0.0000
LOG(K)	0.438929	0.016552	26.51869	0.0000

R-squared	0.996871	Mean dependent var	6.071550
Adjusted R-squared	0.996611	S.D. d	[illegible]
S.E. of regression	0.010956	Ak	[illegible]
Sum squared resid	0.002881	Schw	[illegible]
Log likelihood	85.15432	F-sta	[illegible]
Durbin-Watson stat	1.131094	Prob(	[illegible]

（注）決定係数で先の線型モデルと直接に説明力の比較することはできない（被説明変数が違うため）

コブ･ダグラス型生産関数の推定結果②（技術進歩率一定）

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Sample: 1980 2006
Included observations: 27

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.51962[illegible]	1.122023	-2.245613	0.0346
T	0.000418	0.001591	0.263021	0.7949
LOG(L)	0.662232	0.162099	4.085352	0.0005
LOG(K)	0.425421	0.054060	7.869468	0.0000

R-squared	0.996881	Mean [illegible]	[illegible]6.071[illegible]
Adjusted R-squared	0.996474	S.D. dependent var	0.188[illegible]
S.E. of regression	0.011174	Akaike info criterion	[illegible]
Sum squared resid	0.002872	Schwarz criterion	[illegible]
Log lik[illegible]	[illegible]5.19486	F-statistic	[illegible]
Durbi[illegible]	[illegible].089634	Prob(F-statistic)	[illegible]

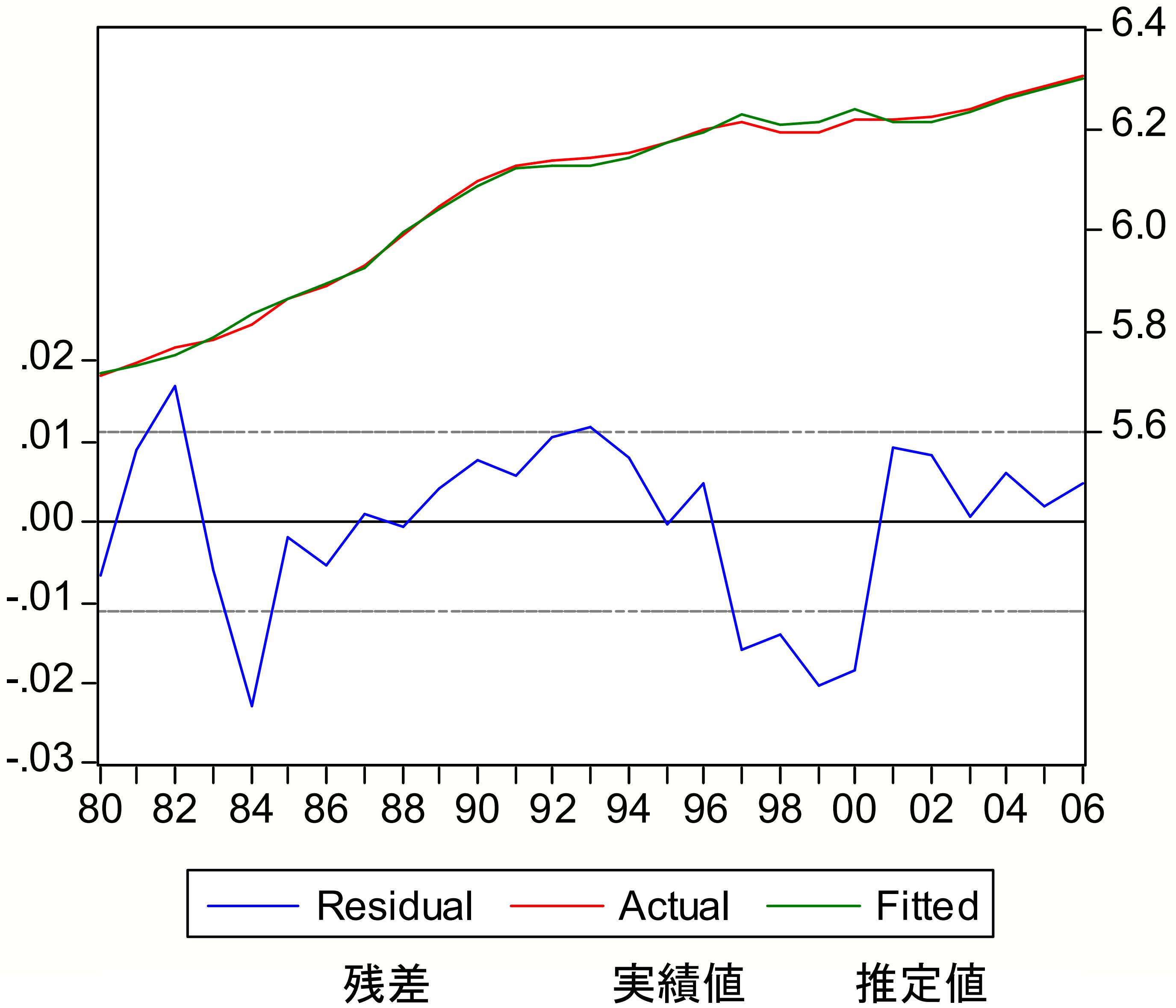
毎年の技術進歩率
=0.0004 (=0.04%)

ただしt値は低い
（有意でない）

自由度修正済
決定係数も低下

技術進歩率が0で
ある確率は79%
（ゼロであっても
おかしくない）

コブ･ダグラス型生産関数の推定結果（グラフ）



推定結果の分析・解釈

- 労働に対する生産の弾力性(β_1)＝
  - 労働投入を1％増やすと生産が0.66％増加
- 資本に対する生産の弾力性(β_2)＝
  - 資本投入を1％増やすと生産が0.43％増加
- 技術進歩率(γ)＝
  - 80年代以降、日本経済の技術進歩は停滞
  - 技術進歩はゼロ($\gamma = 0$)と考えてもおかしくない推定結果
- 日本の労働分配率（標本期間平均、実績値）≒70％ ＞ β_1
  - 日本企業の賃金設定は非競争的？（限界生産力以下しか支払っていない？） ⇒ 仮説検定
- $\beta_1 + \beta_2 =$
  - 日本経済は収穫逓増？ or 得られた標本からのたまたまの結果？（本当は収穫一定で結果は誤差の範囲？ ） ⇒ 仮説検定

✍ 両対数モデルと弾力性

- 両対数モデル　$\ln y = \alpha + \beta \ln x$
の係数 β は<u>弾力性</u>を表す
（x が1％増えたときに y が何％増えるか）

※ 両辺対数をとって x で微分すれば、

$$\ln y = \ln \alpha + \beta \ln x$$

$$\underbrace{\frac{\partial \ln y}{\partial y}}_{=\frac{1}{y}} \frac{\partial y}{\partial x} = \beta \underbrace{\frac{\partial \ln x}{\partial x}}_{=\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \beta = \frac{\partial y / y}{\partial x / x}$$

y の増加率

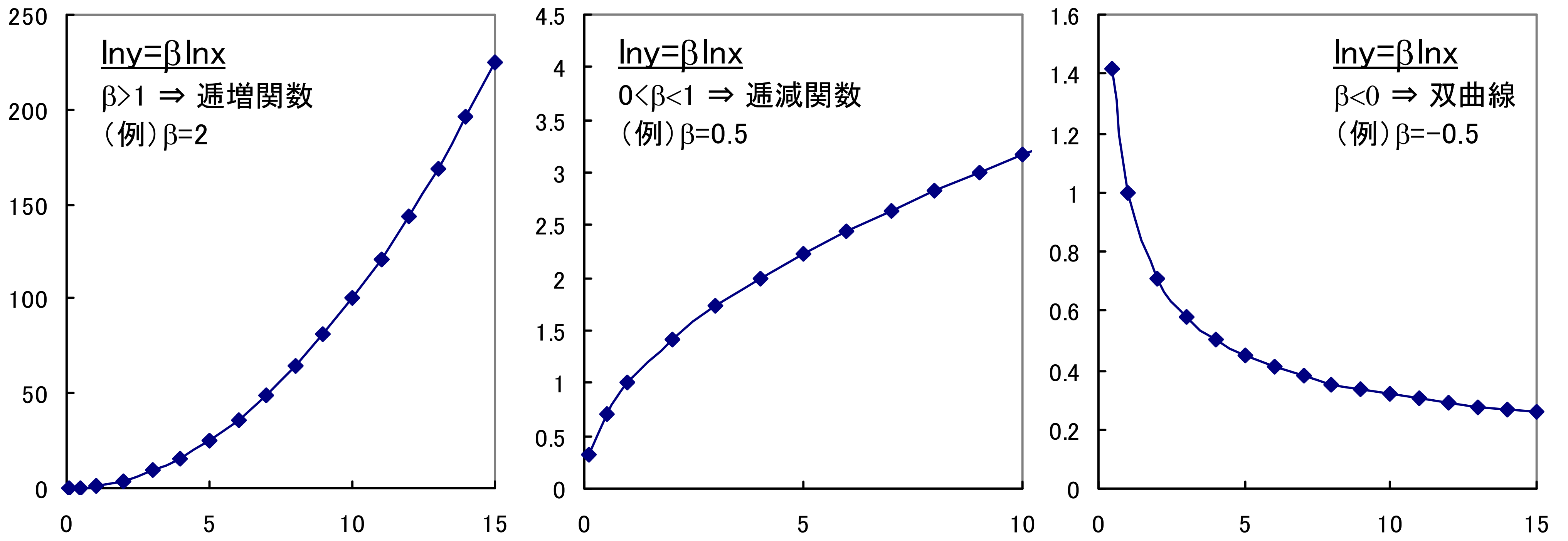
x の増加率

✍両対数モデルの係数の値とグラフの形状

- 両対数モデル　$\ln y = \alpha + \beta \ln x$

  係数 β の値によってさまざまな形状を取りうる

  ⇒応用範囲が広い関数形・・・関数の形状が不明のときには、とりあえず両対数型で推定するのも1つの方法



成長会計：推定結果に基づく要因分解

- 成長率の要因分解

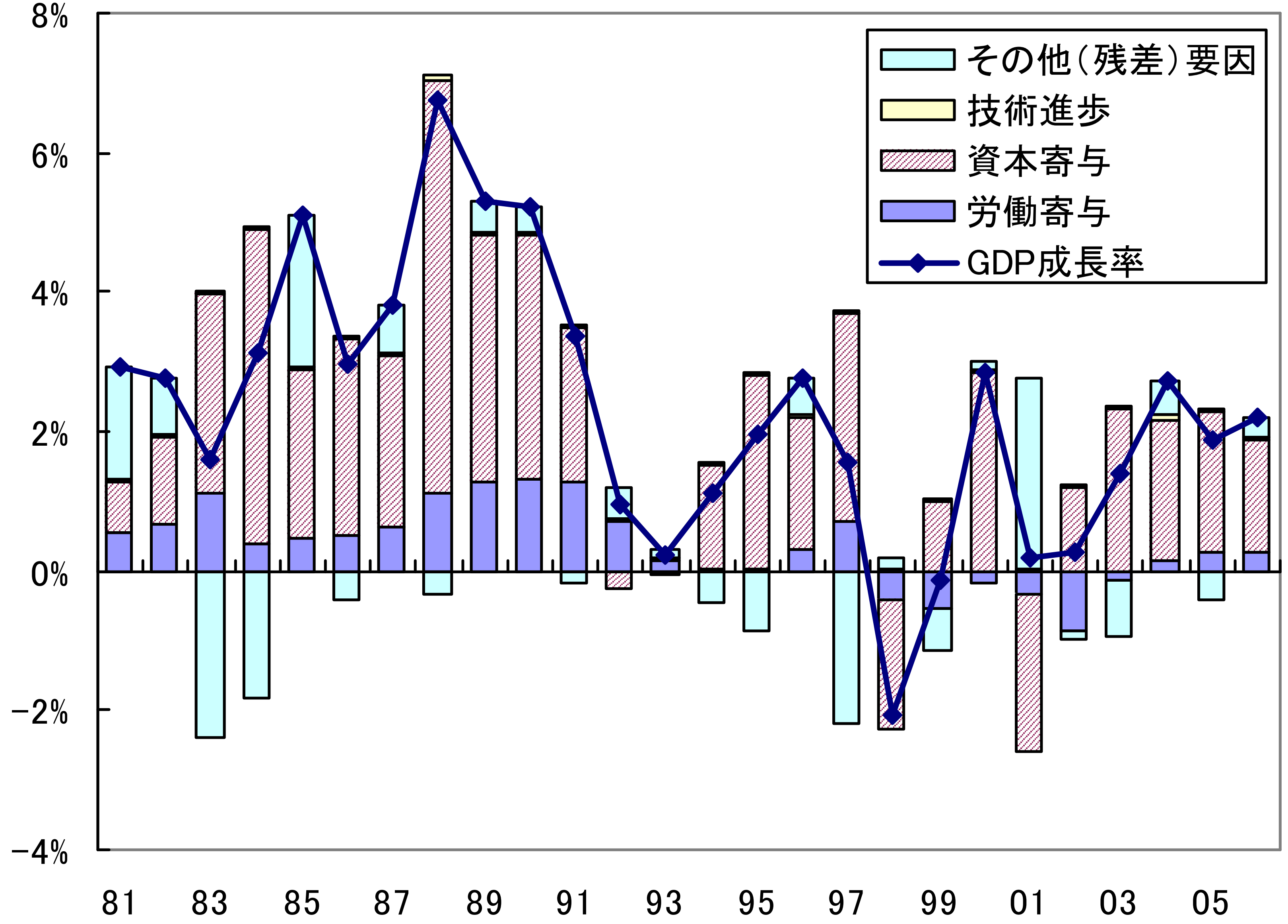
$$\frac{\Delta Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{\Delta A_t}{A_{t-1}} + \beta_1 \frac{\Delta L_t}{L_{t-1}} + \beta_2 \frac{\Delta K_t}{K_{t-1}}$$

$$= \gamma + \beta_1 \frac{\Delta L_t}{L_{t-1}} + \beta_2 \frac{\Delta K_t}{K_{t-1}}$$

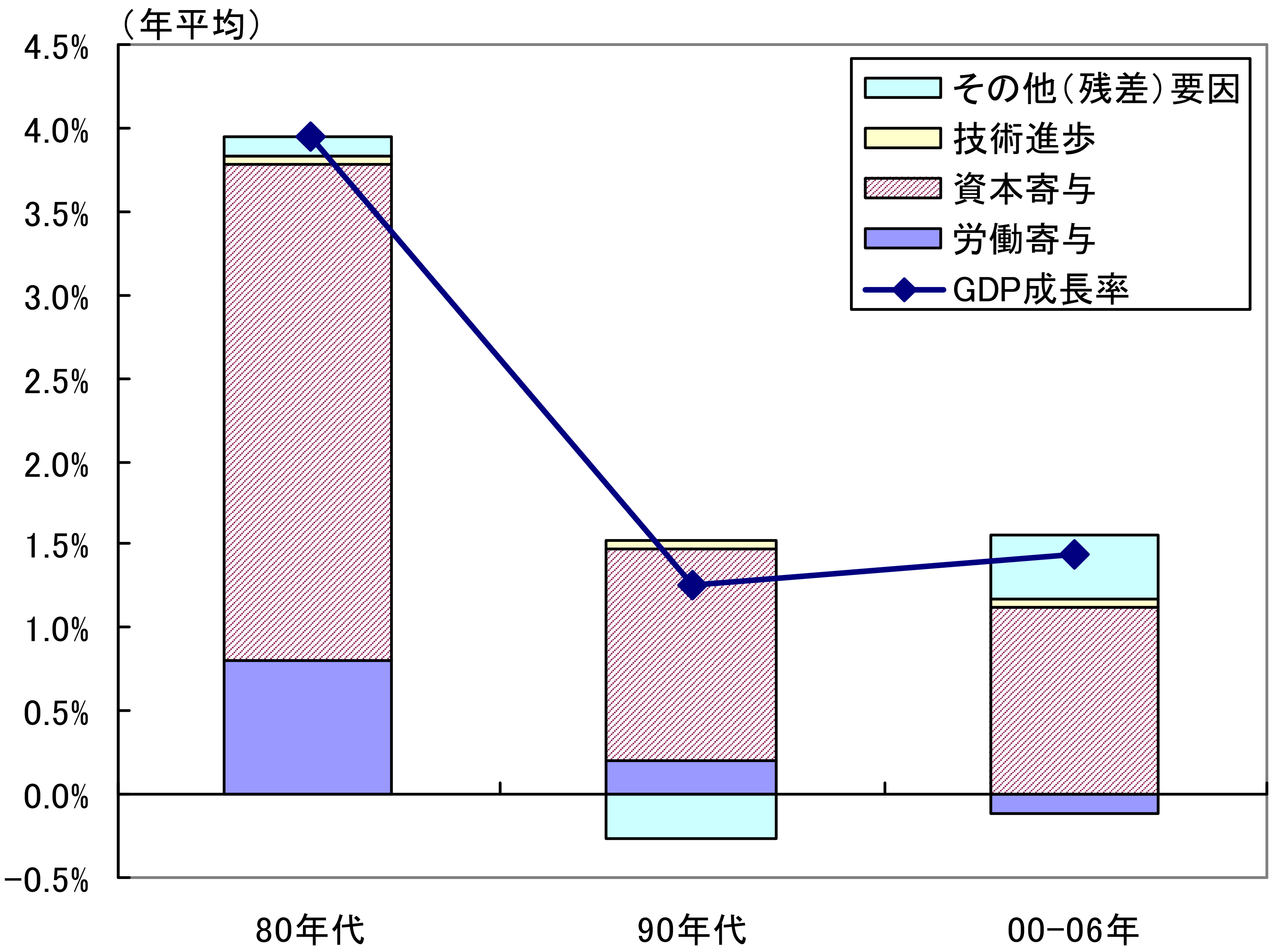
- γ, β_1, β_2の推定結果を用いて

$$\underbrace{\frac{\Delta Y_t}{Y_{t-1}}}_{\text{GDP成長率}} = \underbrace{0.0004}_{\text{技術進歩要因}} + \underbrace{0.6622 \times \frac{\Delta L_t}{L_{t-1}}}_{\text{労働増加要因}} + \underbrace{0.4254 \times \frac{\Delta K_t}{K_{t-1}}}_{\text{資本増加要因}}$$

成長会計：成長率の要因分解（グラフ）



成長会計(長期)



(年平均)
4.5%
4.0%
3.5%
3.0%
2.5%
2.0%
1.5%
1.0%
0.5%
0.0%
−0.5%
その他(残差)要因
技術進歩
資本寄与
労働寄与
GDP成長率
80年代
90年代
00−06年

構造変化とダミー変数

- 技術進歩率≒ゼロとの結果
  - 80年代と90年代で技術進歩率が異なるのではないか？

  （参考）Hayashi and Prescott (2002)「90年代の成長鈍化は生産性上昇率の低下で説明できる」
  - 全期間を通じて技術進歩率一定という仮定が誤りでは？

（対処方法）

- 方法1：標本期間を分けて推定する
  - 80年代と90年代を分けて推定する ･･･ただし標本数が少ない
- 方法2：「ダミー変数」を用いて推定する

  ダミー変数＝ある条件が満たされない場合には0、満たされる場合には1の値をとる変数
  - 80年代には0、90年代には1の値をとるダミー変数を用いる

ダミー変数を用いた定式化

- 定式化①

$$\ln Y_t = \alpha + \gamma_1 T_t + \gamma_2 T_t \times D90 + \beta_1 \ln L_t + \beta_2 \ln K_t$$

  - 80年代の技術進歩率＝γ_1 （※ 上式に$D90 = 0$ を代入して確認せよ）
  - 90年代の技術進歩率＝$\gamma_1 + \gamma_2$ （※ $D90 = 1$ を代入して確認せよ）

- 定式化②

$$\ln Y_t = \alpha + \gamma_1 T_t \times D80 + \gamma_2 T_t \times D90 + \beta_1 \ln L_t + \beta_2 \ln K_t$$

  - 80年代の技術進歩率＝γ_1 （※ $D80=1, D90 = 0$ を代入して確認せよ）
  - 90年代の技術進歩率＝γ_2 （※ $D80=0, D90 = 1$ を代入して確認せよ）

- 定式化③

$$\ln Y_t = \alpha + \gamma_1 T_t + \gamma_2 T_t \times D80 + \gamma_3 T_t \times D90 + \beta_1 \ln L_t + \beta_2 \ln K_t$$

⇒推定不能(「ダミー変数の罠」･･･後述)

ダミー変数による推定結果（定式化①）

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Sample: 1980 2006
Included observations: 27

技術進歩率はマイナス？
90年代にむしろ技術進歩率上昇？

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.089704	1.340672	-1.558699	0.1333
T	-0.000790	0.002565	-0.308116	0.7609
T*D90	0.000601	0.000991	0.606268	0.5505
LOG(L)	0.599707	0.194049	3.090487	0.0053
LOG(K)	0.444463	0.063178	7.035046	0.0000

ただしいずれもt値が低い
（有意ではない）

R-squared	0.996932	Mea	1550
Adjusted R-squared	0.996374	S.D	3177
		Akaike info criterion	-5.956930
		Schwarz criterion	-5.716960
		F-statistic	1787.137
		Prob(F-statistic)	0.000000

80年代の技術進歩率＝
90年代の技術進歩率＝

ダミー変数による推定結果（定式化②）

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Sample: 1980 2006
Included observations: 27

80年代、90年代とも
技術進歩率はマイナス？

いずれもt値が低い
（有意ではない）

Variable	Coefficien	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.08970	1.340672	-1.558699	0.1333
T*D80	-0.000790	0.002565	-0.308116	0.7609
T*D90	-0.000190	0.001900	-0.099867	0.9214
LOG(L)	0.599707	0.194049	3.090487	0.0053
LOG(K)	0.444463	0.063178	7.035046	0.0000

R-squared	0.996932
Adjusted R-squared	0.996374
Prob(F-statistic)	0.000000

80年代の技術進歩率＝

90年代の技術進歩率＝

定式化①の推定結果と比較せよ
・ 80年代、90年代の技術進歩率の値は？
・その他の係数の値は？
・決定係数は？

ダミー変数の罠

- 定式化③

$$\ln Y_t = \alpha + \gamma_1 T_t + \gamma_2 T_t \times D80 + \gamma_3 T_t \times D90 + \beta_1 \ln L_t + \beta_2 \ln K_t$$

⇒推定不能:「ダミー変数の罠」

□ 説明変数の間に完全な線型の関係(共線性)が存在

$$T_t = T_t \times D80_t + T_t \times D90_t$$

⇒ T_t の動きと$(T_t \times D80_t + T_t \times D90_t)$の動きを区別して推定できない

(別の説明)

80年代の技術進歩率 ＝$\gamma_1 + \gamma_2$

90年代の技術進歩率 ＝$\gamma_1 + \gamma_3$

方程式が2本、未知数は3つ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$)⇒推定できない

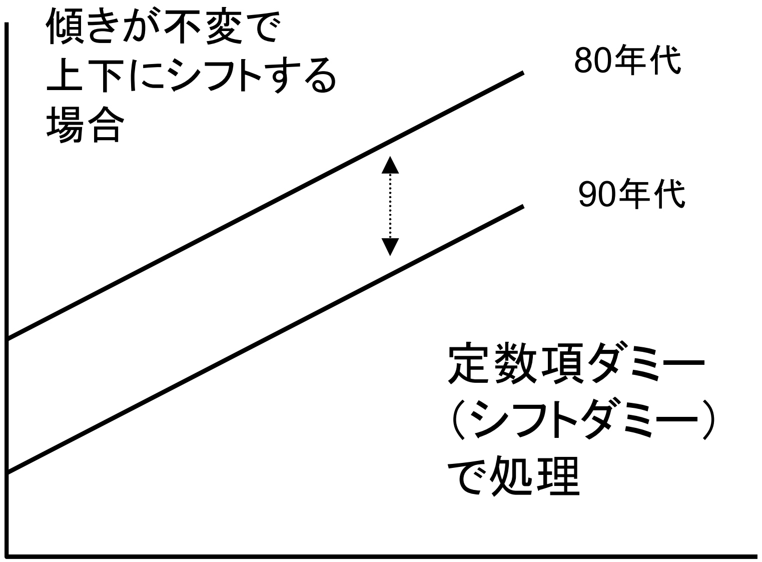
☆ ダミー変数の罠: 全ての期間区分に対応するダミー変数と、ダミー変数を付さない変数を、同時に入れると、推定不能

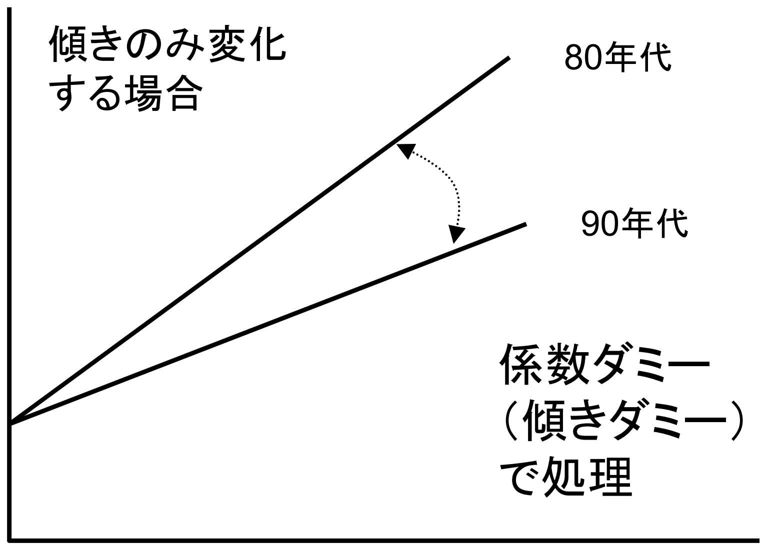
ダミー変数の種類

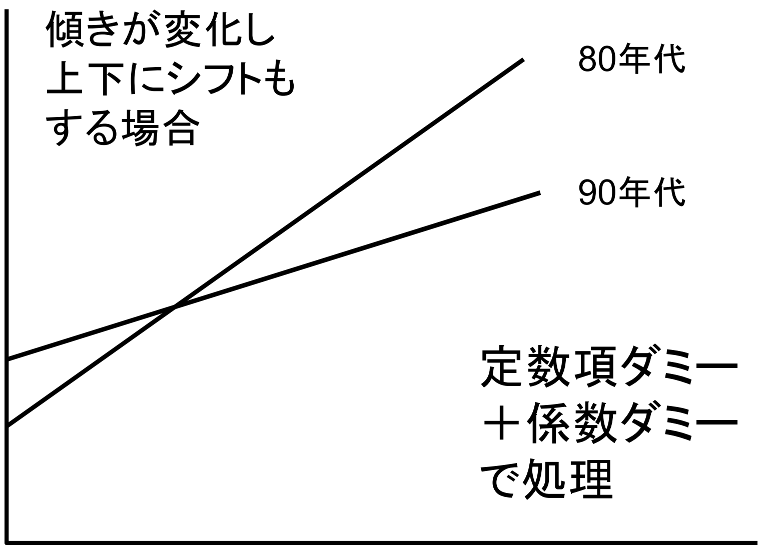
- 定数項ダミーと係数ダミー
  - 定数項ダミー（切片ダミー）・・・水準のシフト
  - 係数ダミー（傾きダミー）・・・説明変数の影響の大きさ（傾き）の変化

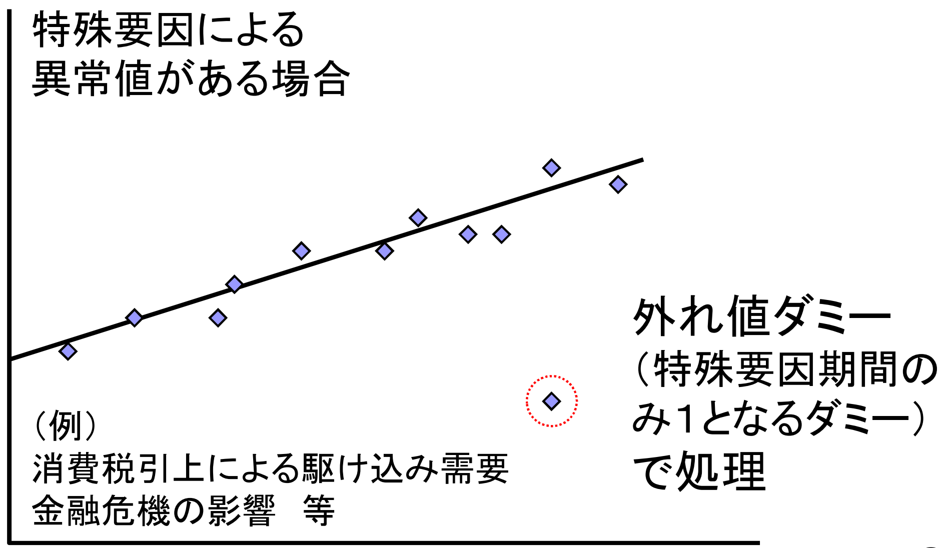
- 構造変化ダミー、季節ダミー、外れ値ダミー
  - 構造変化ダミー・・・80年代と90年代の変化等
  - 季節ダミー・・・季節変動の処理
  - 外れ値ダミー（異常値ダミー）・・・特定の時点の特異な動き（ex.消費税導入の年等）の処理

定数項ダミー、係数ダミー、外れ値ダミー









季節変動と季節ダミー

- 月次、四半期などのデータを用いて推定する場合、季節変動の影響を除いて推定するにはどうするか

- 方法1: 季節調整済データを用いて推定する

  ※ ただし、季節調整済データが利用可能でない統計もある

- 方法2: 季節ダミーを用いて推定する

  （例）四半期データの場合

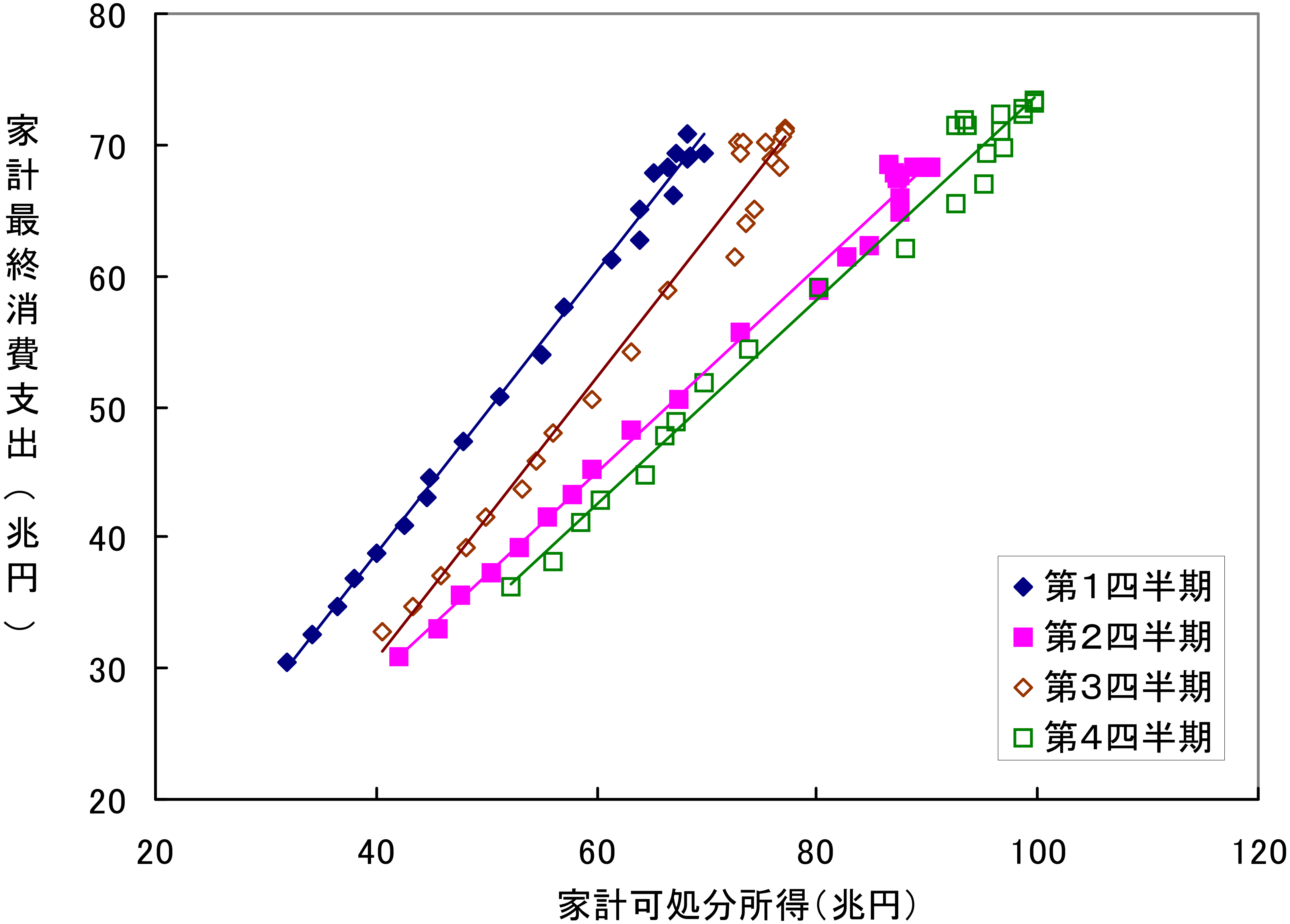
  D_1: 第1四半期に1、その他は0の値をとるダミー変数

  D_2: 第2四半期に1、その他は0の値をとるダミー変数

  D_3: 第3四半期に1、その他は0の値をとるダミー変数

  D_4: 第4四半期に1、その他は0の値をとるダミー変数

所得と消費の季節変動



80
70
60
50
40
30
20
20
40
60
80
100
120
家計最終消費支出（兆円）
家計可処分所得（兆円）
第1四半期
第2四半期
第3四半期
第4四半期

潜在GDPと潜在成長率

- 潜在GDP＝労働力・資本が「フル稼働」したとき（過剰な失業や遊休資本がないとき）に達成できるGDPの水準
- 「フル稼働」の水準をどう定義するか
  - (1) 失業0%、稼働率100%・・・加熱状態？非現実的？
  - (2) 過去の失業率の最低水準、稼働率の最高水準
  - (3) 過去の失業率の平均水準、稼働率の平均水準
  - (4) 高インフレを招かない失業率の水準（フィリップス曲線やUV曲線の推定結果から求める）

  ⇒ 講義では(3)と(4)（フィリップス曲線方式）とを使用
- GDPギャップ＝潜在GDP（フル稼働したときの供給能力）と現実のGDP（需要）の差（＝需給ギャップ）
- 潜在成長率＝潜在GDPの成長率＝失業や稼働率といった景気変動要因を除いた成長率（＝経済の実力）

潜在GDP

- 潜在GDP

$$\ln Y_t^* = \alpha + \gamma T_t + \beta_1 \ln L_t^* + \beta_2 \ln K_t^*$$

$$\Rightarrow Y_t^* = \exp(\ln Y_t^*)$$

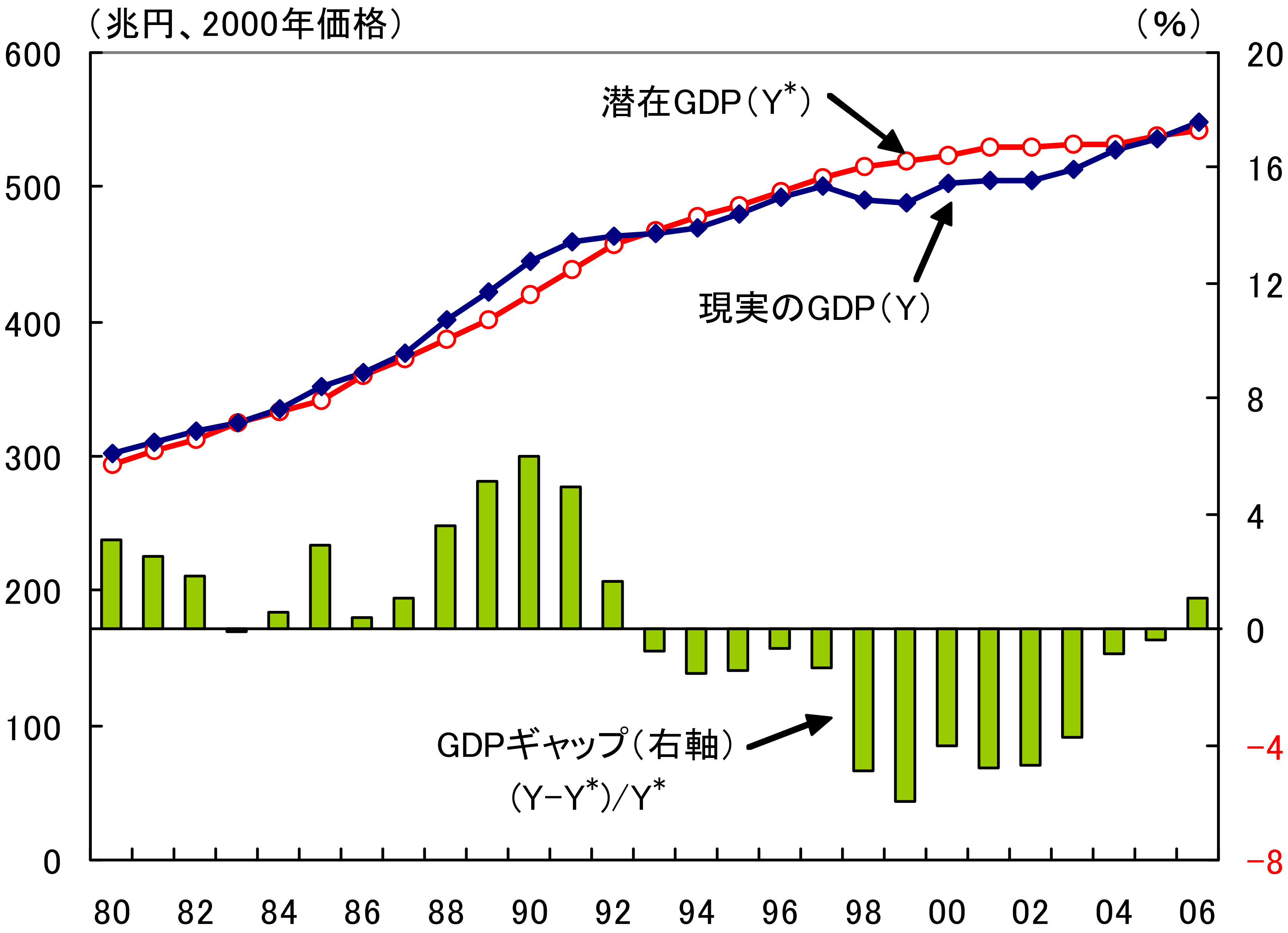
$$\left[\text{or} \quad Y_t^* = A_t^* L_t^{*\beta_1} K_t^{*\beta_2} \right]$$

  - 潜在的労働投入 $L_t^* = L_t \times \dfrac{100 - U^*}{100 - U_t}$
  - 潜在的資本投入 $K_t^* = K_t \times \dfrac{S^*}{S_t} \left(= K_{0t} \times \dfrac{S^*}{100} \right)$
  - (潜在的)技術水準

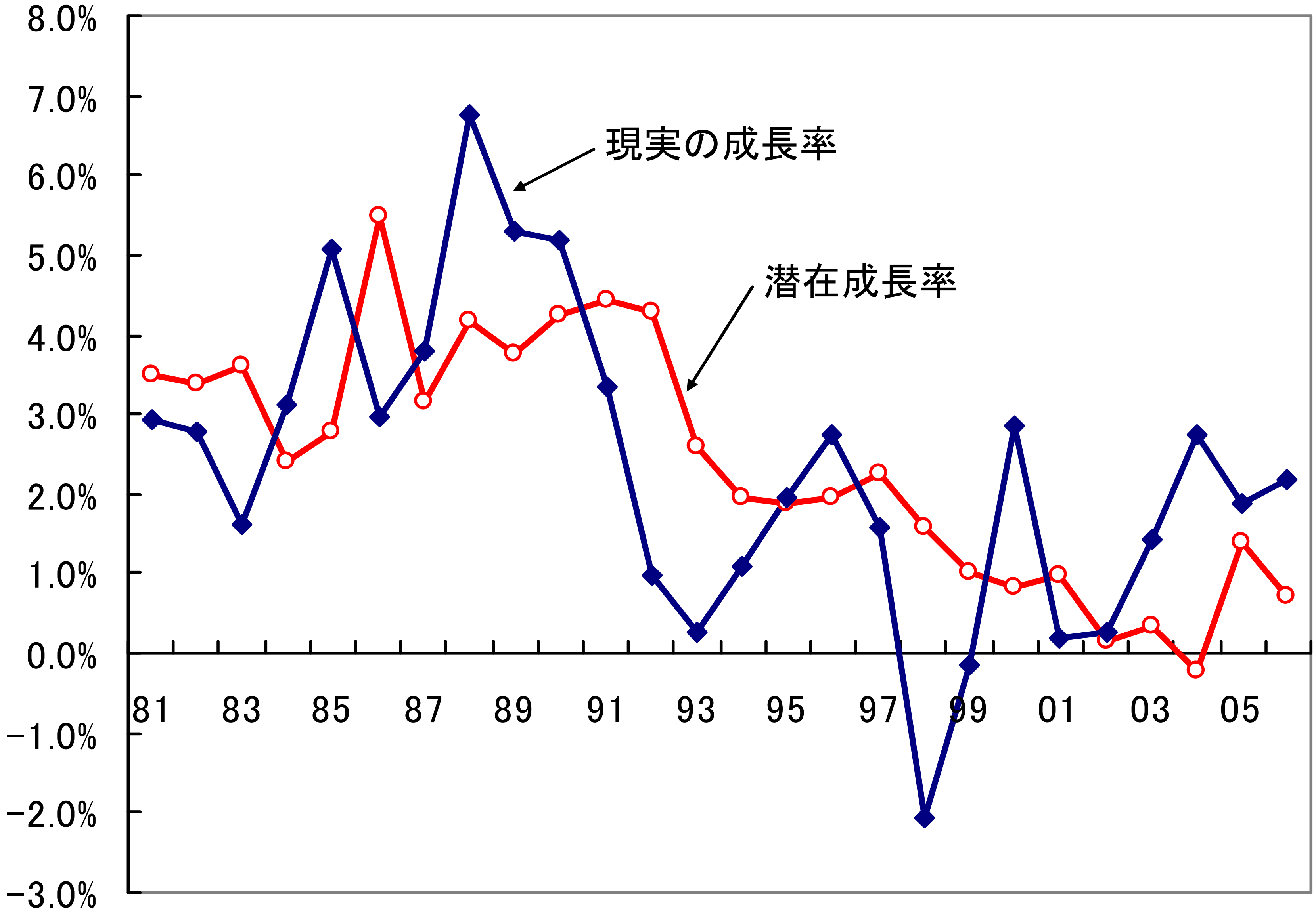
$$\ln A_t^* = \alpha + \gamma T_t \Leftrightarrow A_t^* = \exp(\alpha + \gamma T_t)$$

L_t: 現実の就業者数
U^*:「フル稼働」の失業率
cf. 自然失業率
U_t: 現実の失業率
K_t: 現実の資本投入量
S^*:「フル稼働」の稼働率
S_t: 現実の稼働率
K_{0t}: 稼働率調整前の資本ストック

潜在GDP(グラフ)


(兆円、2000年価格)
(%)
600
500
400
300
200
100
0
20
16
12
8
4
0
−4
−8
潜在GDP(Y*)
現実のGDP(Y)
GDPギャップ(右軸)
(Y−Y*)/Y*
80
82
84
86
88
90
92
94
96
98
00
02
04
06

現実の成長率と潜在成長率



将来の潜在成長率予測:
改革ケースと非改革ケース

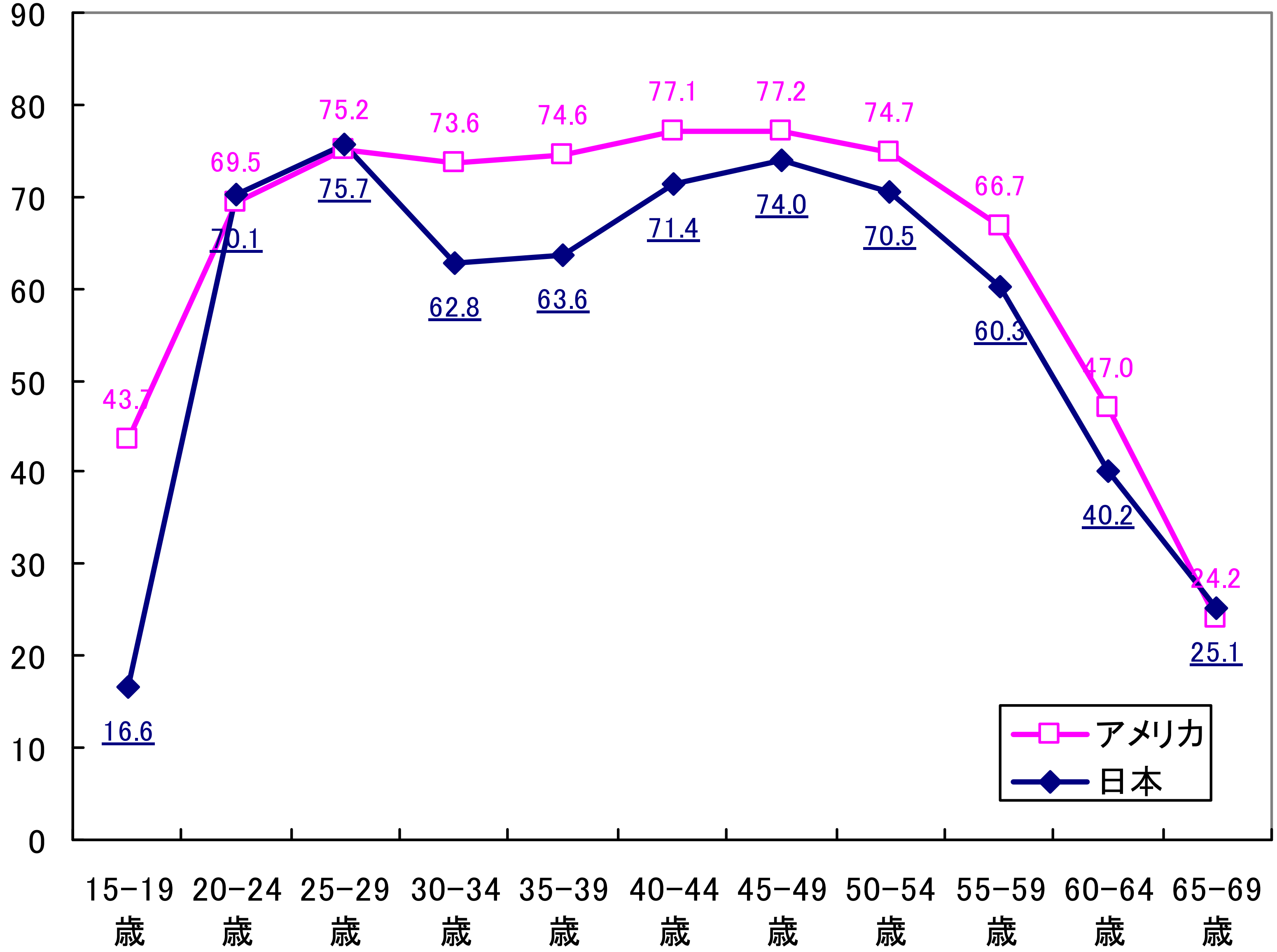
- 潜在成長率の要因分解

$$\frac{\Delta Y^*}{Y^*} = \frac{\Delta A^*}{A^*} + \beta_1 \frac{\Delta L^*}{L^*} + \beta_2 \frac{\Delta K^*}{K^*}$$

【想定】

- 潜在的技術進歩率
  - 改革なし: 推定された技術進歩率($\gamma = 0.04\%$)のまま
  - 改革あり: 米国なみの生産性上昇率(1.30%)を達成
- 潜在的労働力投入量
  - 改革なし: 将来人口推計の労働力人口の伸び率
  - 改革あり: 20歳以上の女性の労働力率が米国なみに改善
- 潜在的資本投入量
  - 改革なし: 90年代の資本伸び率(3.0%)程度
  - 改革あり: 80年代の資本伸び率(7.0%)の半分程度まで回復

M字カーブ（女性の労働力率）



将来の潜在成長力予測(結果)

	2006年	2016年	年平均伸び率
生産年齢人口	8,373	7,602	−1.0%
労働力人口（改革なし）	6,648	6,241	−0.6%
（改革あり）	−	6,433	−0.3%

	生産性上昇率	資本伸び率
改革なし	0.04%	3.0%
改革あり	1.30%	3.5%

	潜在成長率	生産性寄与	労働寄与	資本寄与
改革なし				
改革あり				

競争的賃金設定の検証

- 競争的に賃金が設定 ⇒ β_1＝労働分配率
  - β_1の推定値・・・0.662
  - 過去の労働分配率の平均・・・0.698

  ⇒ 賃金設定が非競争的（企業は賃金を払いすぎ）か？

  推定の誤差（ブレ）の範囲か？

  ⇒ 統計学的に検証・・・仮説検定
- 推定値の誤差（ブレ）はどの程度なのか？

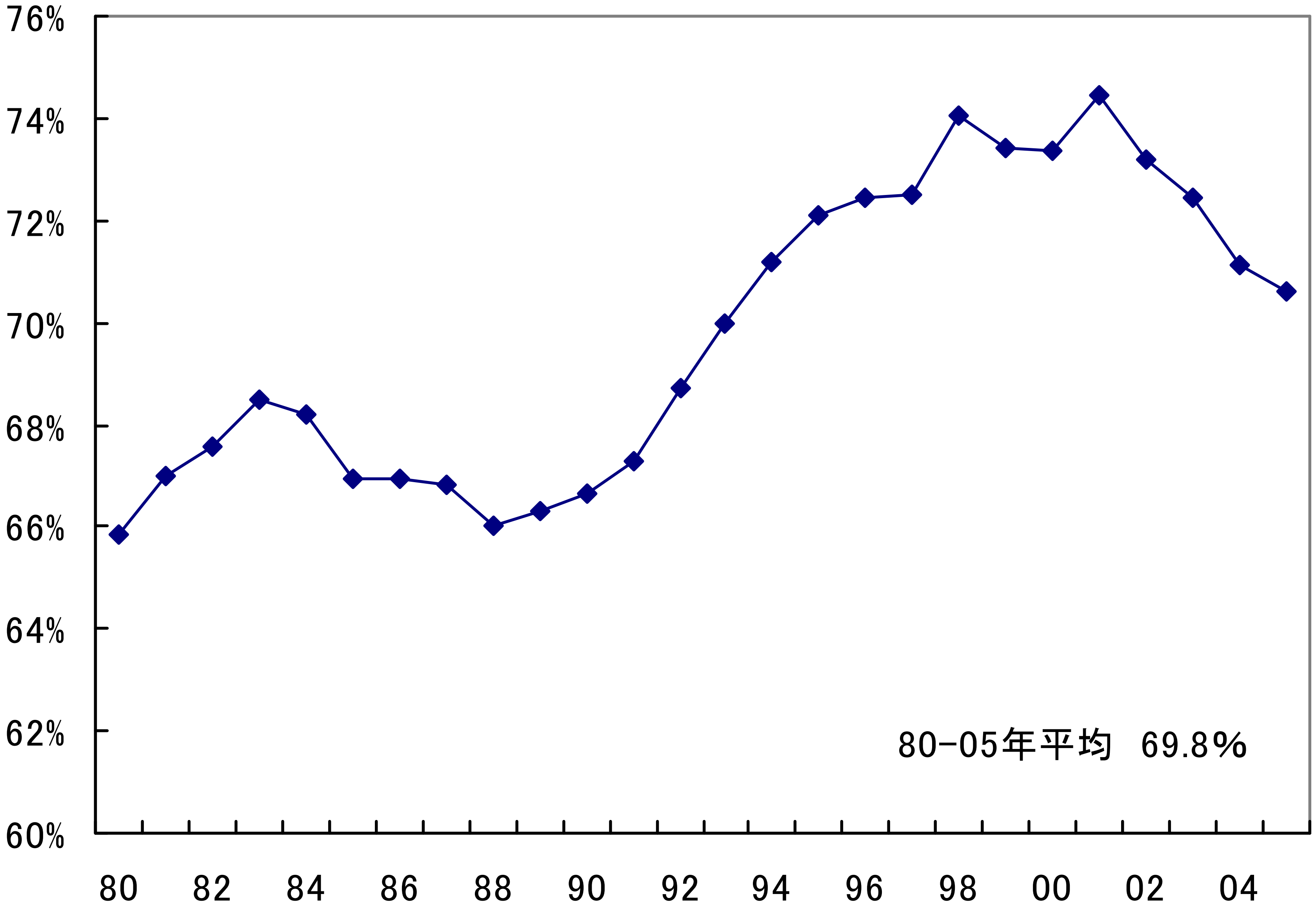
  ⇒ 推定値はどの程度「幅」をもって見れば良いか？

  ・・・区間推定

（参考）最小二乗法の統計学的性質

※「統計学的推定」の意味を理解せよ

日本の労働分配率


76%
74%
72%
70%
68%
66%
64%
62%
60%
80
82
84
86
88
90
92
94
96
98
00
02
04
80-05年平均　69.8%

点推定と区間推定

Dependent Variable: LOG(Y)
Included observations: 27

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.519629	1.122023	-2.245613	0.0346
T	0.000418	0.001591	0.263021	0.7949
LOG(L)	0.662232	0.162099	4.085352	0.0005
LOG(K)	0.425421	0.054060	7.869468	0.0000

- 労働に関する生産の弾力性の推定値 $\hat{\beta}_1 = 0.6622$ ←点推定
- しかし、弾力性の真の値(β_1)がこの推定値とぴったり一致しているとは限らない(推定誤差があり得る)®推定値は幅を持ってみる必要
- どの程度幅をとって見れば良いか?: 真の値β_1を正確に知ることはできないが、推定結果からβ_1が確率的にとり得る範囲を求めることはできる・・・区間推定
- 上記の推定結果の場合、「弾力性の真の値β_1は、95%の確率で、0.3268〜0.9864の範囲にある」ということができる(β_1の95%信頼区間)

区間推定の求め方

一般的に、

- 係数βの推定値(点推定)＝$\hat{\beta}$
- $\hat{\beta}$の標準誤差＝$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$
- 自由度＝標本数(T)－推定する係数の数(k)

のとき、βの95%信頼区間は、

$$\boxed{\hat{\beta} \pm t_{T-k,2.5\%} \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}$$

(ただし、$t_{T\text{-}k,2.5\%}$は自由度T-kのときのt分布の2.5%分位点)

※ したがって、信頼区間は、

- 推定精度が高い($\hat{\beta}$ の標準誤差 $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ が小さい)ほど
- 標本数が多い＝自由度T-k が大きい(⇒$t_{T\text{-}k,2.5\%}$が小さい)ほど

狭く求めることができる

※ t分布表が利用できないときは、簡略化して $\hat{\beta} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ を信頼区間とすることもある

区間推定の求め方（例1）

Dependent Variable: LOG(Y)
Included observations: 27

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.519629	1.122023	-2.245613	0.0346
T	0.000418	0.001591	0.263021	0.7949
LOG(L)	0.662232	0.162099	4.085352	0.0005
LOG(K)	0.425421	0.054060	7.869468	0.0000

- 労働に関する生産の弾力性β_1の推定値（点推定）$\hat{\beta}_1 = \boxed{0.6622}$
- 推定値 $\hat{\beta}_1$ の標準誤差 $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \boxed{0.1621}$
- 自由度（$T-k$）＝標本数（$\boxed{27}$）－推定した係数の数（$\boxed{4}$）＝$\boxed{23}$

  $\Rightarrow$ 自由度 23 のt分布の 2.5% 分位点 ＝$\boxed{2.069}$
- β_1の95%信頼区間 $\hat{\beta}_1 \pm t_{T-k,2.5\%} \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \boxed{0.6622} \pm \boxed{2.069} \times \boxed{0.1621}$

  $= \boxed{0.3268} \sim \boxed{0.9864}$

区間推定の求め方(例2)

Dependent Variable: LOG(Y)
Included observations: 27

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.519629	1.122023	-2.245613	0.0346
T	0.000418	0.001591	0.263021	0.7949
LOG(L)	0.662232	0.162099	4.085352	0.0005
LOG(K)	0.425421	0.054060	7.869468	0.0000

- 資本に関する生産の弾力性β_2の推定値(点推定)$\hat{\beta}_2 = \boxed{\quad}$
- 推定値 $\hat{\beta}_1$ の標準誤差 $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = \boxed{\quad}$
- 自由度($T-k$)=標本数($\boxed{\quad}$)ー推定した係数の数($\boxed{\quad}$)=$\boxed{\quad}$

  ⇒ 自由度 23 のt分布の 2.5% 分位点 = $\boxed{\quad}$
- β_2の95%信頼区間 $\hat{\beta}_2 \pm t_{T-k,2.5\%} \times \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = \boxed{\quad} \pm \boxed{\quad} \times \boxed{\quad}$

  $= \boxed{\quad} \sim \boxed{\quad}$

区間推定の求め方(例3)

Dependent Variable: LOG(Y)
Included observations: 27

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.519629	1.122023	-2.245613	0.0346
T	0.000418	0.001591	0.263021	0.7949
LOG(L)	0.662232	0.162099	4.085352	0.0005
LOG(K)	0.425421	0.054060	7.869468	0.0000

- 技術進歩率γの推定値(点推定) $\hat{\gamma} = \boxed{}$
- 推定値 $\hat{\gamma}$ の標準誤差 $\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}} = \boxed{}$
- 自由度($T-k$)＝標本数($\boxed{}$)－推定した係数の数($\boxed{}$)＝$\boxed{}$

  ⇒ 自由度 23 のt分布の 2.5% 分位点 ＝$\boxed{}$
- γ の95%信頼区間 $\hat{\gamma} \pm t_{T-k,2.5\%} \times \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_1} = \boxed{} \pm \boxed{} \times \boxed{}$

  $= \boxed{} \sim \boxed{}$

区間推定からわかること

- （例３）において
  - 技術進歩率 γ の95%信頼区間の中に0が入っている

    ⇒ 技術進歩率 γ の真の値が0であった可能性は十分にある

    ＝「技術進歩はなかった」と考えてもおかしくはない

    ⇒ 逆に「確実に技術進歩があった」と言うことはできない
- （例１）において
  - β_1 の95%信頼区間に0. 698（日本の労働分配率の値）が入っている

    ⇒ β_1 の真の値が労働分配率に等しかった可能性は十分にある

    ＝「賃金は競争的に決定されていた」と考えてもおかしくはない

    ⇒ 逆に「賃金決定は競争的でなかった」と言うことはできない

◎ より直接的に検証する方法・・・<u>仮説検定</u>

※「区間推定」と「仮説検定」は表裏の関係にある

✍区間推定の考え方①（σ_ε^2が既知の場合）

- $\hat{\beta}$ は期待値 β, 分散 $\sigma_{\hat{\beta}}^2 = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{s_x^2}$ の正規分布 $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma_{\hat{\beta}}^2)$ に従う
（統計学的性質②）

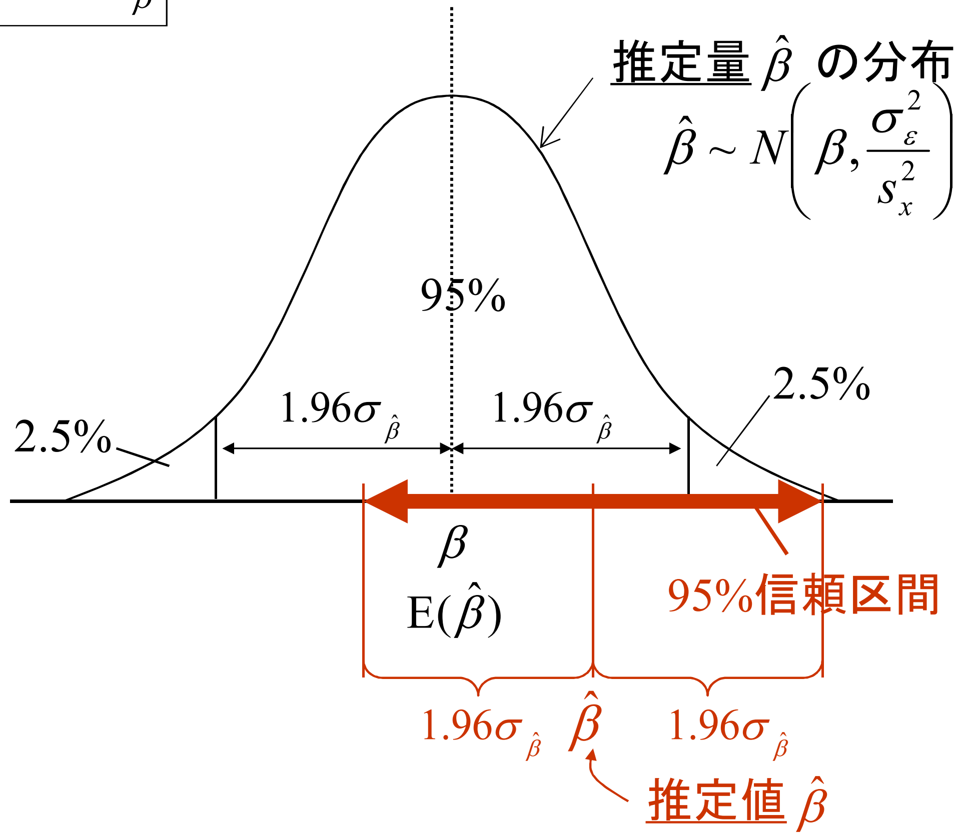
⇔ $\hat{\beta}$ は95%の確率で $\beta \pm 1.96\sigma_{\hat{\beta}}$ に入る

⇔ β は95%の確率で $\boxed{\hat{\beta} \pm 1.96\sigma_{\hat{\beta}}}$ に入る

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma_{\hat{\beta}}^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma_{\hat{\beta}}} \sim N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Prob}\left(-1.96 \le \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma_{\hat{\beta}}} \le 1.96\right) = 95\%$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Prob}(\hat{\beta} - 1.96\sigma_{\hat{\beta}} \le \beta \le \hat{\beta} + 1.96\sigma_{\hat{\beta}}) = 95\%$$

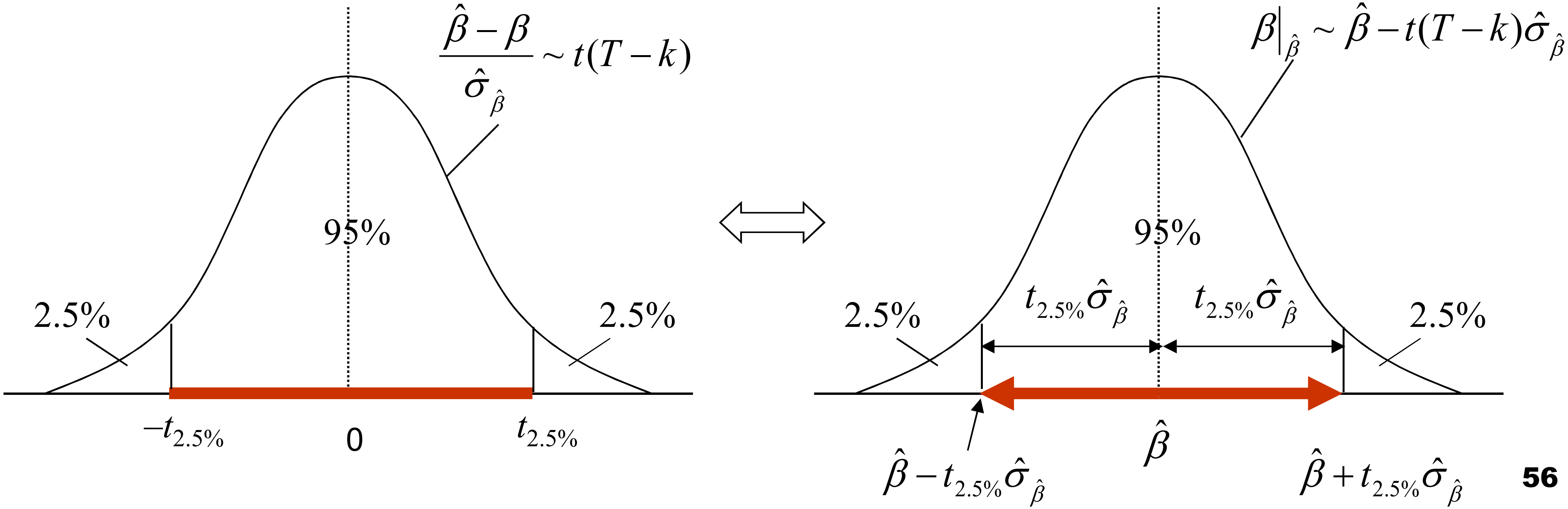


✍区間推定の考え方②（σ_ε^2が未知の場合）

- 通常はσ_ε^2は未知・・・正規分布を用いて信頼区間を求めることはできない

⇒ σ_ε^2の不偏推定量 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{\Sigma \hat{\varepsilon}_t^2}{T-k}$ を用いると、$\dfrac{\hat{\beta}-\beta}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} = \dfrac{\hat{\beta}-\beta}{\hat{\sigma}_\varepsilon / s_x^2}$

が自由度T-k のt分布に従うことを利用（統計学的性質③）



仮説検定(例1)

Dependent Variable: LOG(Y)
Included observations: 27

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.519629	1.122023	-2.245613	0.0346
T	0.000418	0.001591	0.263021	0.7949
LOG(L)	0.662232	0.162099	4.085352	0.0005
LOG(K)	0.425421	0.054060	7.869468	0.0000

- $\hat{\beta}_1 = 0.6622$ と推定されたが、「β_1の真の値は労働分配率(0.7)に等しい」との仮説を検証したい
- $\dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ が自由度$T-k$のt分布に従う(統計的性質③)ことを利用
- $\hat{\beta}_1 = \boxed{0.6622,}\ \beta_1 = \boxed{0.7},\ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \boxed{0.1621}$ を代入して$\dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \boxed{-0.2330}$
- 自由度$T-k = \boxed{23}$のt分布表と比較して10%水準で棄却されない

(β_1＝0.7である確率は10%以上ある)

仮説検定(例2)

Dependent Variable: LOG(Y)
Included observations: 27

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.519629	1.122023	-2.245613	0.0346
T	0.000418	0.001591	0.263021	0.7949
LOG(L)	0.662232	0.162099	4.085352	0.0005
LOG(K)	0.425421	0.054060	7.869468	0.0000

- 技術進歩率は $\hat{\gamma} = 0.0004$ と推定されたが、「γ の真の値は0(技術進歩なし)」との仮説を検証したい
- $\dfrac{\hat{\gamma} - \gamma}{\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}}}$ が自由度 $T-k$ のt分布に従う(統計的性質③)ことを利用
- $\hat{\gamma} = \boxed{}$ $\gamma = \boxed{}$ $\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}} = \boxed{}$ を代入して $\dfrac{\hat{\gamma} - \gamma}{\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}}} = \boxed{}$
- 自由度 $T-k = \boxed{}$ のt分布表と比較して10%水準で棄却$\boxed{}$
  (γ=0である確率は10%以上ある)

仮説検定と区間推定の関係

- 仮説検定と区間推定は表裏の関係
  - β_1 の95%信頼区間（0.3268~0.9864）に0.7が含まれる
    ⇔ $\beta_1 = 0.7$の帰無仮説は5%の有意水準で棄却されない
    （$\beta_1 = 0.7$である確率は5%以上ある）
  - β_1 の95%信頼区間（0.3268~0.9864）に1が含まれない
    ⇔ $\beta_1 = 1$の帰無仮説は5%の有意水準で棄却される
    （$\beta_1 = 1$である確率は5%以下しかない）
  - γの95%信頼区間（-0.0029~0.0036）に0が含まれる
    ⇔ $\gamma = 0$の帰無仮説は5%の有意水準で棄却されない
    （$\gamma = 0$である確率は5%以上ある）

✍仮説検定の一般的な手順

(1) 仮説を立てる

① 帰無仮説 H_0 (Null Hypothesis):

通常は、棄却されることが想定されている(例: $\beta = 0$)

② 対立仮説 H_1 (Alternative Hypothesis):

帰無仮説と対立する仮説 (例: $\beta \neq 0$)

通常は、帰無仮説を棄却することによって、これを間接的に証明する。

(2) 帰無仮説の下での検定統計量(Test Statistic)を計算する

(3) 検定統計量から、推定された結果が帰無仮説の下で生じる確率を求める

⇒ 確率が低ければ(1%, 5%,10%以下など)帰無仮説を棄却

(①帰無仮説は誤り＝②対立仮説が正しいと判断)

⇒ 確率が高ければ帰無仮説を受容

(①帰無も誤りとは言えないと判断)

Eviewsによる仮説検定の仕方

(1) 仮説を立てる

①帰無仮説 H_0: $\beta_1 = 0.7$ v.s. ②対立仮説 H_0: $\beta_1 \neq 0.7$

(2) 検定等計量を計算する

- 推定結果Windowから、View → Coefficient tests → Wald - Coefficient restrictions を選択
- 帰無仮説による係数への制約(この場合はc(3)=0.7)を入力

(3) 計算された検定等計量から帰無仮説を棄却するか判断

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	0.054285	(1, 23)	0.8178
Chi-square	0.054285	1	0.8158

※ 手計算で行ったt検定の結果と比較せよ(t値とF値の関係は?)

規模の収穫一定の検証

- $\beta_1+\beta_2=1$と言えるかどうかの検定・・・係数間の関係の仮説検定
- Eviewsによる検定手順

  (1) 仮説を立てる　H_0: $\beta_1+\beta_2=1$ vs H_1: $\beta_1+\beta_2\neq 1$

  (2) 検定等計量を計算

  - 推定結果Windowから、View → Coefficient tests → Wald - Coefficient restrictions を選択
  - 帰無仮説H_0による係数への制約（c(3) + c(4) = 1）を入力

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	0.567689	(1, 23)	0.4588
Chi-square	0.567689	1	0.4512

  (3) 仮説を棄却するか判断

  - p値が0.4588 ⇒ 仮説H_0は棄却しない（制約付モデルを受容）

    ⇒ 日本経済は規模の収穫一定と考えておかしくない

✍係数間の関係の仮説検定の考え方

- 係数間に特定の関係を想定しないモデル（制約なしモデル）と特定の関係（$\beta_1+\beta_2=1$）を制約として課したモデル（制約モデル）を考える
  - 制約なしモデル（一般モデル）

$$\ln y = \alpha + \gamma T + \beta_1 \ln L + \beta_2 \ln K$$

  - 制約モデル（$\beta_1+\beta_2=1$™$\beta_1=1-\beta_2$を代入 ）

$$\ln y = \alpha + \gamma T + (1-\beta_2)\ln L + \beta_2 \ln K$$

$$\Leftrightarrow \ln y - \ln L = \alpha + \gamma T + \beta_2(\ln K - \ln L)$$

- 仮説（$\beta_1+\beta_2=1$）が正しければ両モデルの推定結果に大きな違いは生じないはず
- 仮説が正しくなければ、推定結果は大きく違うはず

® 検定等計量は、両モデルの推定結果が統計的に「同じ」と言える確率を示す

✍制約付きモデルの推定結果

Dependent Variable: LOG(Y)-LOG(L)
Method: Least Squares
Sample: 1980 2006
Included observations: 27

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.676961	0.089146	-18.81136	0.0000
T	-0.000276	0.001285	-0.214830	0.8317
LOG(K)-LOG(L)	0.457220	0.033478	13.65741	0.0000

R-squared	0.994020	Mean dependent var	-2.656773
Adjusted R-squared	0.993522	S.D. dependent var	0.137582
S.E. of regression	0.011073	Akaike info criterion	-6.064126
Sum squared resid	0.002943	Schwarz criterion	-5.920144
Log likelihood	84.86570	F-statistic	1994.852
Durbin-Watson stat	1.163750	Prob(F-statistic)	0.000000