（参考資料）

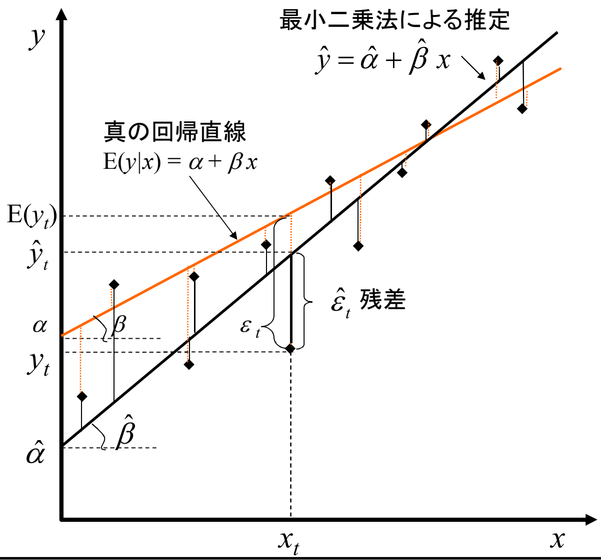
最小二乗法②　統計学的性質

経済統計分析
（2013年度秋学期）

✍回帰分析と統計学的推定

母集団（真の関係）	標本による推定
■真のモデル（単回帰の例） $$y_t = \underbrace{\alpha + \beta x_t}_{\text{確定的部分}} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{確率的部分＝撹乱項}}$$ α, β: 真の回帰係数(Parameter) x: 説明変数、y: 被説明変数 ε: 撹乱項 □ x_tが与えられると、xとyの真の関係（$\alpha+\beta x_t$）に確率的な変動ε_tが加わってy_tが決定	■最小二乗法による推定 $$y_t = \underbrace{\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t}_{\text{説明できる部分}} + \underbrace{\hat{\varepsilon}_t}_{\text{説明できない部分＝残差}}$$ $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$: 回帰係数の推定値（Estimator) x_t, y_t: 実現・観察された標本 $\hat{\varepsilon}_t$: 残差項 □観察された標本（x_t, y_t）を用いて、説明できない部分（残差$\hat{\varepsilon}_t$）が最小となるようにxとyの関係（α, β）を推定 ⇒ 最小二乗推定量

✍回帰分析と統計学的推定〔図示〕



- 真の関係$y=\alpha+\beta x$に確率的変動εが加わって、観察できる標本(x_t, y_t)が生じる
- 観察された標本(x_t, y_t)を用いて、α, βを推定

⇒ 最小二乗推定量 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$

∴推定された回帰直線は真の回帰直線と必ずしも一致しない

☆どれだけ正確に推定できるか、望ましい推定量か

⇒最小二乗法の統計学的性質

✍望ましい推定量とは何か

- 不偏推定量

  ＝偏りなく推定される（1回1回の推定値は真の値から誤差が生じるが、誤差の生じ方に偏りがなく、平均的に見れば正しく推定される）

  ＝推定量の期待値が真のパラメター値に等しい　$E(\hat{\beta}) = \beta$

- 一致推定量

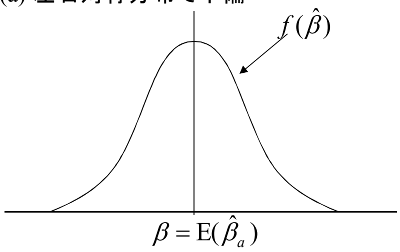
  ＝データ（標本）の数が増えると、推定値は真の値に限りなく収束する（一致する）ようになる

- 効率的推定量

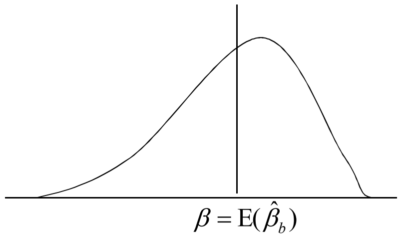
  ＝推定値のバラツキ（分散）が小さく、精度が高く推定できる

✍望ましい推定量～不偏推定量

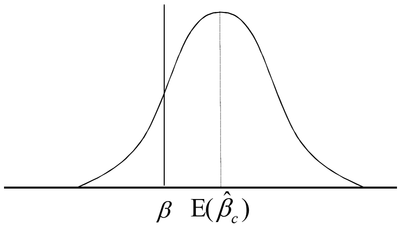
(a) 左右対称分布で不偏



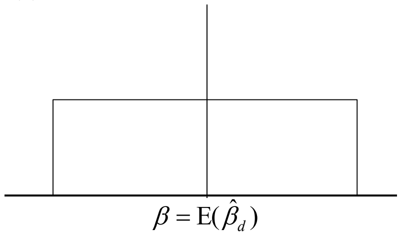
(b) 非対称だが不偏



(c) 左右対称だが不偏でない

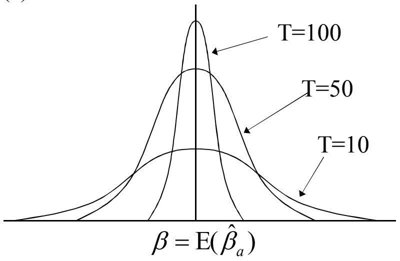


(d) 一様分布で不偏

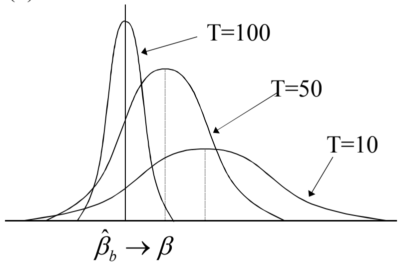


✍望ましい推定量～一致推定量

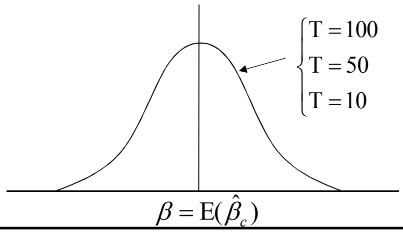
(a) 不偏でかつ一致性をもつ



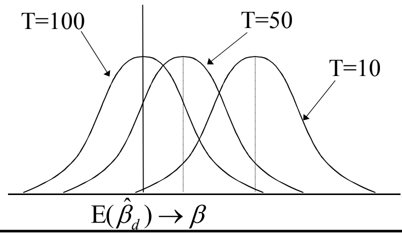
(b) 不偏ではないが一致性をもつ



(c) 不偏だが一致性はない

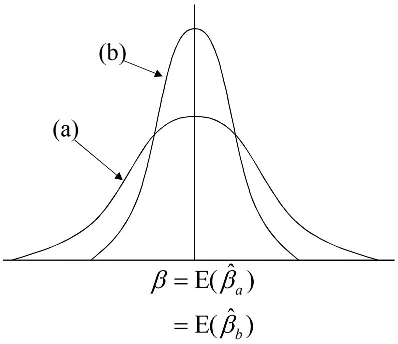


(d) 漸近不偏だが一致性はない

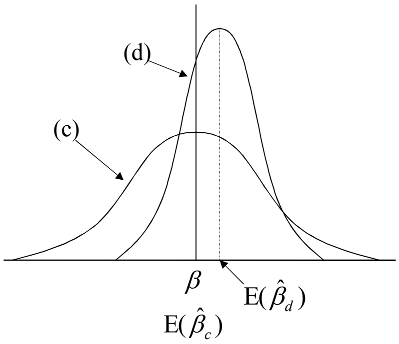


✍望ましい推定量～効率的推定量

(a)(b)ともに不偏だが(b)の方が分散が小さい　⇒　(b)の方が効率的



(c)は不偏だが分散が大きく、(d)は不偏ではないが分散が小さい　⇒　どちらが効率的？



- 通常は、(a)(b)のように「不偏推定量」というような制限を付けたうちで、どちらが効率的かを選ぶ　⇒　最小分散不偏推定量
- (c)(d)のような場合にどちらが効率的かは、一概には言えない

✍最小二乗法の統計学的性質①

回帰分析における「標準的な統計学的仮定」が満たされるとき、<u>最小二乗推定量は、統計学的に望ましい以下の性質を持つ</u>

- 最小二乗推定量は、「最良線形不偏推定量（BLUE: Best Linier Unbiased Estimator）」である
- 最小二乗推定量は、「一致推定量」である

✍ 最小二乗法の統計学的性質②
最小二乗推定量の確率分布（単回帰）

単回帰モデル　$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$　;　$\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}\ N(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$
の最小二乗推定量　$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$　は、

$\hat{\alpha}$ は、<u>期待値 α, 分散 $\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{T}+\frac{\bar{x}^2}{s_x^2}\right)$ の正規分布</u>に従う

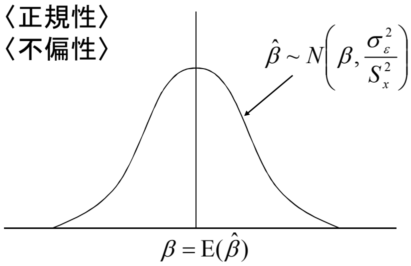
$\hat{\beta}$ は、<u>期待値 β, 分散 $\sigma_\varepsilon^2 / s_x^2$ の正規分布</u>に従う

$$\boxed{\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{T}+\frac{\bar{x}^2}{s_x^2}\right)\right), \quad \hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{s_x^2}\right)}$$

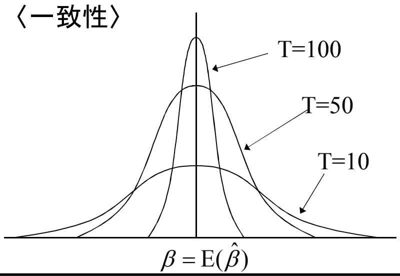
9

✍ 最小二乗法の統計学的性質〔図示〕

〈正規性〉
〈不偏性〉



〈一致性〉



- $\hat{\beta}$ の期待値

$$\boxed{\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta}$$

$\Rightarrow \hat{\beta}$ は<u>不偏推定量</u>

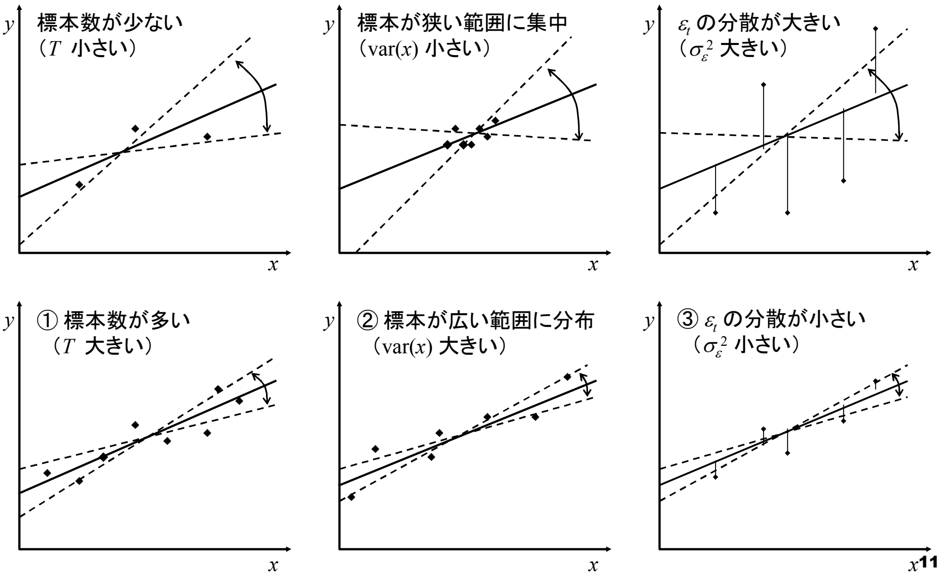
- $\hat{\beta}$ の分散

$$\boxed{\mathrm{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{s_x^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T\,\mathrm{var}(x)}}$$

$\therefore$ $\hat{\beta}$ の分散が小さくなるのは
① 標本数 T が大きいとき
$\Rightarrow \hat{\beta}$ は<u>一致推定量</u>
② x の分散 $\mathrm{var}(x)$ が大きいとき
（広い範囲の標本が得られるとき）
③ 撹乱項 ε_t の分散 σ_ε^2 が小さいとき

10

✍精度の高い推定結果が得られる場合



✍最小二乗法の統計学的性質③

○ 撹乱項の分散 σ_ε^2 の不偏推定量は、RSS を自由度で割って得られる

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\Sigma \hat{\varepsilon}_t^2}{T-k} = \frac{RSS}{\text{自由度}}$$

○ RSS と撹乱項の分散 σ_ε^2 の比は、自由度 $T-k$ のカイ二乗分布に従う

$$\frac{RSS}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2(T-k)$$

○ 最小二乗推定量の推定誤差 $\hat{\beta}_i - \beta_i$ をその標準誤差 $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}$ で除したものは、自由度 $T-k$ の t 分布に従う

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \sim t(T-k)$$

これらの性質は、仮説検定等において用いられる

✍回帰分析における「標準的仮定」

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \ldots + \beta_{k-1} x_{k-1t} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim iid\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

1. 被説明変数 y_t に関する仮定
   被説明変数 y_t は、説明変数 $x_{1t},\ldots,x_{k-1t}$ の線形関数（一次関数）となる確定的部分と、確率的部分（撹乱項 ε_t）からなる確率変数である
2. 説明変数 $x_{1t},\ldots,x_{k-1t}$ に関する仮定
   説明変数 $x_{1t},\ldots,x_{k-1t}$ は、互いに線形独立な非確率変数である
3. 撹乱項 ε_t に関する仮定
   撹乱項 ε_t は、互いに独立に期待値 0, 分散 σ_ε^2 の同一の正規分布に従う確率変数である

13

✍仮定1：被説明変数に関する仮定

（仮定1）
被説明変数 y_t は、説明変数 $x_{1t},\ldots,x_{k-1t}$ の線形関数（一次関数）となる確定的部分と、確率的部分（撹乱項 ε_t）からなる確率変数である

$$y_t = \underbrace{\alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \ldots + \beta_{k-1} x_{k-1t}}_{\text{確定的部分}} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{確率的部分}}$$

（仮定1-1） 線形性：y_t は説明変数 $x_{1t}, \ldots, x_{k-1t}$ と撹乱項 ε_t の線形結合で表される

（仮定1-2） 説明変数の妥当性：y_t に重大な影響を与える変数は、すべてモデルの説明変数 $x_{1t}, \ldots, x_{k-1t}$ に含まれる

（仮定1-3） 安定性：回帰パラメター $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ は、すべての標本について一定不変である

14

✍仮定2：説明変数に関する仮定

（仮定2）
説明変数 $x_{1t}, \ldots, x_{k\text{-}1t}$ は、互いに線形独立な非確率変数である

（仮定2-1）線形独立性：説明変数 $x_{1t}, \ldots, x_{k\text{-}1t}$ の間に純粋な線形関係（1次関数で表される関係（完全な相関関係など））は存在していない

（仮定2-2）非確率変数：説明変数 $x_{1t}, \ldots, x_{k\text{-}1t}$ は、確率的な変動をしない非確率変数である

✍仮定3：被説明変数に関する仮定

（仮定3）
撹乱項 ε_t は、互いに独立に、期待値 0, 分散 σ_ε^2 の同一の正規分布に従う確率変数である

$$\varepsilon_t \sim \text{iid } N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

（仮定3-1）ゼロ平均：ε_t の期待値はゼロ　$[\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0]$

（仮定3-2）均一分散：ε_t の分散は全標本について σ_ε^2 で一定
$[\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \text{ for all } t]$

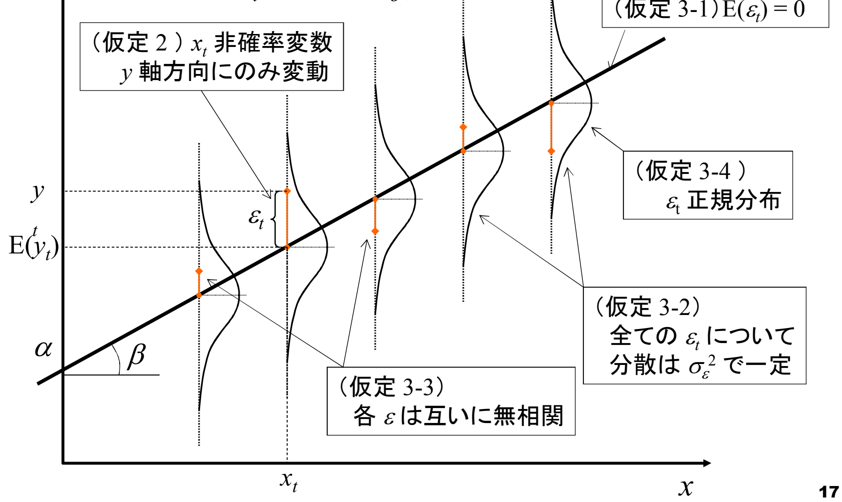
（仮定3-3）系列無相関：ε_t は互いに無相関
$[\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad \text{for all } t \neq s]$

（仮定3-4）正規性：ε_t は正規分布する　$[\varepsilon_t \sim N]$

✍仮定1～3の意味：単回帰の場合

単回帰モデル　$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$

$\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

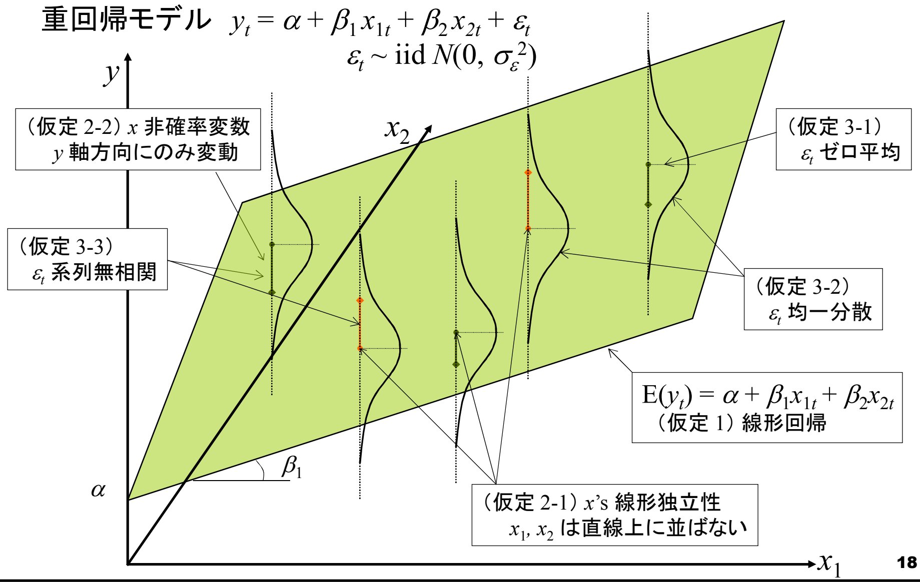


17

✍仮定1～3の意味：重回帰の場合

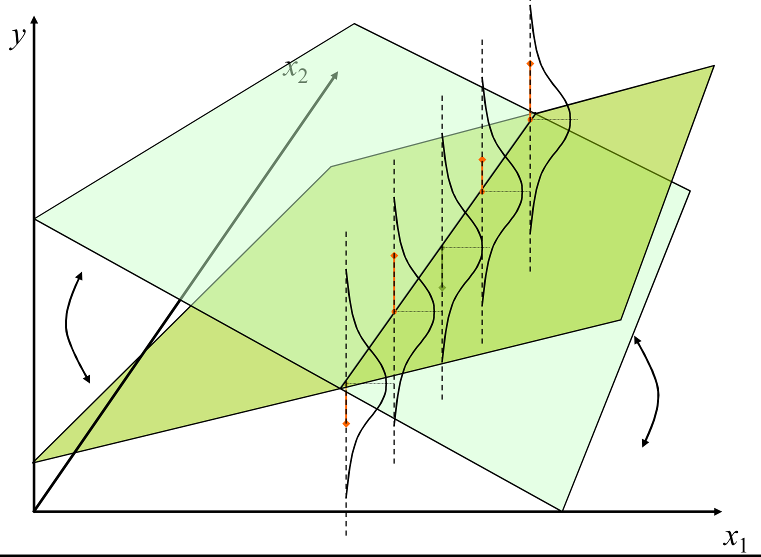
重回帰モデル　$y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t$

$\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$



18

（仮定 2-1）違反の場合：x_{1t}, x_{2t} が非線形独立（直線状に並ぶ）
⇒　平面が定まらない＝α, β_1, β_2 が定まらない（推定不能）



19