6. 消費関数と乗数効果

経済統計分析
（2014年度秋学期）

消費関数

（統計分析手法）

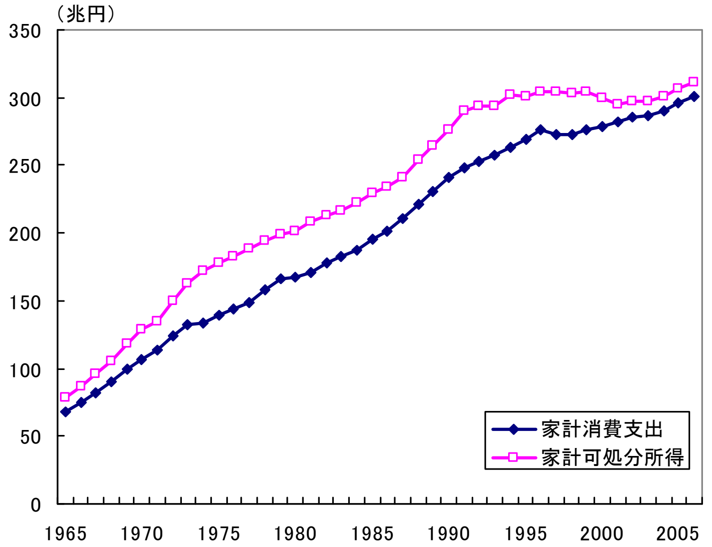
- 回帰分析（単回帰、重回帰）
- 最小二乗法
- 回帰分析の推定結果の読み取り方
  - 回帰係数の意味
  - 実績値、推定値、残差
  - 決定係数・自由度修正済決定係数
- 説明変数の選択
- 外れ値（異常値）の影響
- 推定結果に基づく要因分解

消費関数

（経済理論等との関連）

- 消費関数
  - ケインズ型消費関数（流動性制約仮説）
  - ライフサイクル・恒常所得仮説
  - 習慣形成仮説
- 限界消費性向と乗数（45度線法＝ISモデル）

消費と所得の関係（長期）①



（データ）内閣府「国民経済計算」

ケインズ型消費関数

- 消費は当期の（可処分）所得により決定

所得　税金

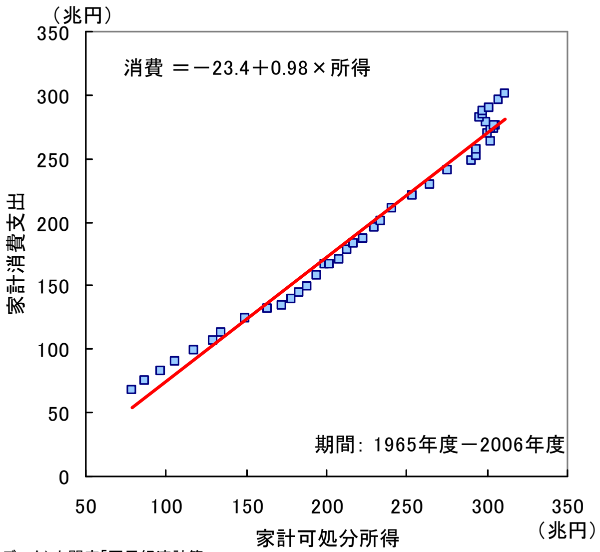
$$C_t = \alpha + \beta(\underbrace{Y_t - T_t}_{\text{可処分所得}})$$

消費

- 流動性制約仮説
  - お金（流動性）の借入れができない → 今期の消費は今期の可処分所得で賄わなければならない

5

消費と所得の関係（長期）②



（データ）内閣府「国民経済計算」

6

消費関数の推定結果（長期・単回帰）

〔Excel 分析ツールによる推定結果〕

回帰統計	
重相関 R	0.989877
重決定 R2	0.979857
補正 R2	0.979353
標準誤差	10.35933
観測数	42

切片の係数（定数項）＝－23.4
→ 基礎的消費＝－23.4兆円？

傾きの係数（所得YDの係数）＝0.98
→ 限界消費性向＝0.98

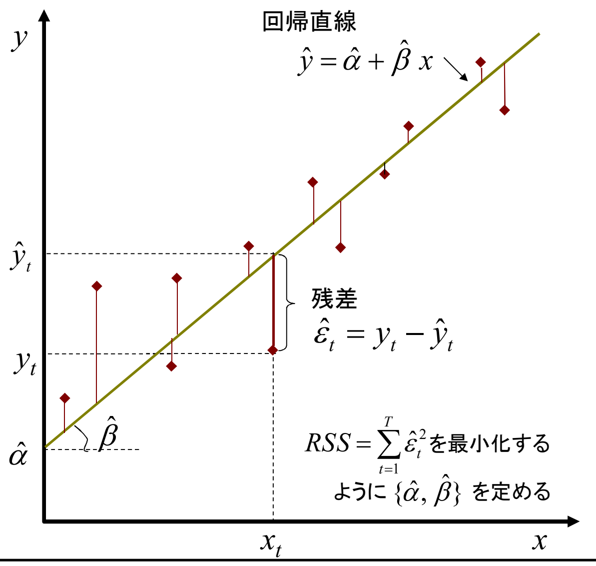
分散分析表

	自由度	変動	分散	観測された分散比	有意 F
回帰	1	208810.4	208810.4	1945.758	1.53E-35
残差	40	4292.628	107.3157		
合計	41	213103			

説明変数

	係数	標準誤差	t	P-値
切片	-23.4027	5.297977	-4.41728	7.42E-05
YD	0.980675	0.022232	44.11075	1.53E-35

最小二乗法による回帰の考え方



- 回帰直線を標本のなるべく「近く」に通す
- 「近く」を観測点の y 軸方向の距離（=残差）で測る
- 全体として垂直方向の距離を最小化するには？
  - (1) 残差の総和を最小化
    －正負が相殺される
  - (2) 残差の絶対値の総和を最小化
    －数学的に扱いにくい
  - (3) 残差の2乗の総和（残差平方和）を最小化
    ⇒最小二乗法

回帰分析と最小二乗法

- 被説明変数y_tの動きを説明変数x_tの動きで説明＝回帰分析
  - 説明変数が1つ ⇒ 単回帰
  - 説明変数が2つ以上 ⇒ 重回帰

被説明変数（従属変数）　係数　説明変数（独立変数）　残差

定数項　傾き

$$\underset{\text{被説明変数（従属変数）}}{y_t} = \underbrace{\overbrace{\underset{\text{定数項}}{\hat{\alpha}} + \underset{\text{傾き}}{\hat{\beta}}}^{\text{係数}}\, \underset{\text{説明変数（独立変数）}}{x_t}}_{x_t\text{で説明できる部分}} + \underbrace{\underset{\text{残差}}{\hat{\varepsilon}_t}}_{\text{説明できない部分}} \quad \ldots\ldots\ldots.\ (1)$$

- 説明できない部分が小さくなるように回帰式の係数（$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$）を推定する有力な方法 ＝最小二乗法

9

最小二乗法（単回帰）

- 説明できない部分（＝残差）の2乗の総和（残差平方和 RSS）を最小化するように係数（ $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ）を求める

$$\operatorname*{Min}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}} \sum \hat{\varepsilon}_t^2$$

残差の2乗の総和

- 最小化の一階条件　 ⇒ 2本の方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sum \hat{\varepsilon}_t^2}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \\ \dfrac{\partial \sum \hat{\varepsilon}_t^2}{\partial \hat{\beta}} = 0 \end{cases}$$

- 2本の方程式、2個の未知数（ $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ）
  ⇒ 方程式を解いて（ $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ）を求める

10

✍最小二乗法（単回帰）

- 残差 $\hat{\varepsilon}_t = y_t - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t)$ の平方和（RSS）を最小化

$$\underset{\hat{\alpha},\hat{\beta}}{Min}\ RSS = \sum \hat{\varepsilon}_t^2 = \sum (y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_t)^2$$

- 最小化の一階条件

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\alpha}} = \sum 2(y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_t)(-1)$$

$$= -2\left[\sum y_t - T\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum x_t\right] = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}} = \sum 2(y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_t)(-x_t)$$

$$= -2\left[\sum x_t y_t - \hat{\alpha}\sum x_t - \hat{\beta}\sum x_t^2\right] = 0 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

(2), (3) 式（＝正規方程式）を解いて、RSSを最小化する $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ を求める

正規方程式

$$\begin{cases} T\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum x_t = \sum y_t & \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)' \\ \hat{\alpha}\sum x_t + \hat{\beta}\sum x_t^2 = \sum x_t y_t & \cdots\cdots \quad (3)' \end{cases}$$

⇒ 2つの未知数に方程式2本：これを解けば $\{\hat{\alpha}, \hat{\beta}\}$ が得られる

(1)'より
$$\hat{\alpha} = \left(\sum y_t \big/ T\right) - \hat{\beta}\left(\sum x_t \big/ T\right) = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

(2)'に代入して
$$T\bar{x}\bar{y} - \hat{\beta}T\bar{x}^2 + \hat{\beta}\sum x_t^2 = \sum x_t y_t$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t - T\bar{x}\bar{y}}{\sum x_t^2 - T\bar{x}^2} = \frac{\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$$

最小二乗推定量

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = \frac{\mathrm{cov}(x_t, y_t)}{\mathrm{var}(x_t)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ただし $S_x^2 = \sum (x_t - \bar{x})^2,\ S_{xy} = \sum (x_t - \bar{x})(y_t - \hat{y})$

消費関数の推定結果(単回帰)
① 変数(Variable), 係数(Coefficient)

Dependent Variable: CONS　被説明変数
Method: Least Squares
Sample: 1965 2006
Included observations: 42

説明変数

Variable	Coefficient	Std.		Prob.
C	-23.40267	5.297977	-4.417285	0.0001
YD	0.980675	0.022232	44.11075	0.0000

切片の係数＝－23.4
（定数項 C ）
→ 基礎的消費

傾きの係数＝0.98
（所得 YD の係数）
→ 限界消費性向

R-squared	0.979857	Mean	99.4043
Adjusted R-squared	0.979353	S.D. d	2.09462
S.E. of regression	10.35933	Akaike	560100
Sum squared resid	4292.627	Schwarz criterion	7.642846
Log likelihood	-156.7621	F-statistic	1945.758
Durbin-Watson stat	0.104129	Prob(F-statistic)	0.000000

消費関数の推定結果(単回帰)
② 回帰式

$$CONS_t = -23.4 + 0.98 \times YD_t + \hat{\varepsilon}_t$$

被説明変数（消費）〈実績値〉　係数（定数項）　係数（傾き）　説明変数（所得）　残差

回帰式で説明できる部分

説明できない部分

$$\widehat{CONS}_t = -23.4 + 0.98 \times YD_t$$

消費の〈推定値〉

消費関数の推定結果(単回帰)
③ 決定係数(R-squered)

Dependent Variable: CONS
Method: Least Squares
Sample: 1965 2006
Included observations: 42

推定方法：最小二乗法

標本期間，標本数

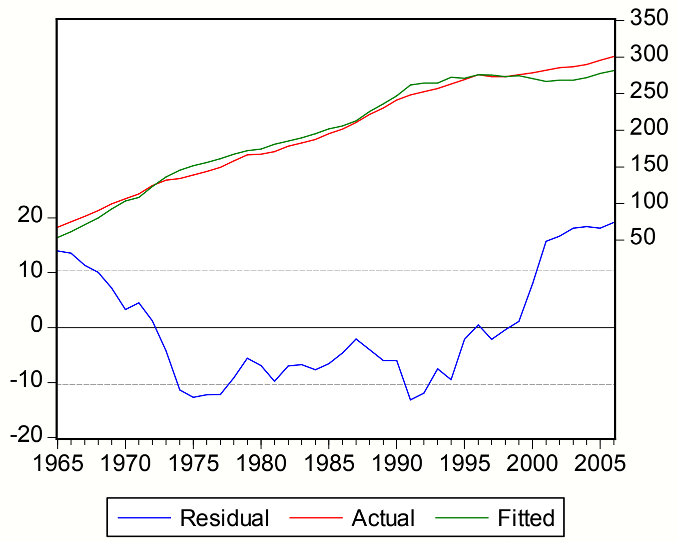
Variable	Coefficient	Std. E...	...t-Statisti...	Prob.
C	-23.40267	5.2...		.0001
YD	0.980675	0...		.0000

R-squared	0.979857	Mean dependent var	199.4043
Adjusted R-squared	0.979353	S.D. dependent var	72.09462
S.E. of regression	10.35933	Aka...	...100
Sum squared resid	4292.627	Schwarz...	...846
Log likelihood	-156.7621	F-statisti...	...758
Durbin-Watson stat	0.104129	Prob(F-statistic)	0.000000

決定係数＝0.979
→消費(CONS)の動きの97.9%が 所得(YD) の動きで説明できる

自由度修正済決定係数
(説明変数の数を考慮に入れた決定係数、後述)

消費関数の推定結果(単回帰)
④ 実績値，推定値，残差



残差 実績値 推定値

平方和分解

- 実績値、推定値、残差

$$\underset{\text{実績値}}{y_t} = \underset{\substack{\text{推定値}\\ \left(\text{説明変数 } x_t \text{ で説明できる部分}\right)}}{\hat{y}_t} + \underset{\substack{\text{残差}\\ \left(\text{説明できない部分}\right)}}{\hat{\varepsilon}_t}$$

$$\begin{pmatrix} y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t + \hat{\varepsilon}_t \\ \hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t \end{pmatrix}$$

- 被説明変数 y_t の実績値の変動〔総平方和TSS〕は、説明変数 x_t によって説明される部分（推定値）の変動〔ESS〕と、説明できない残差の平方和〔RSS〕とに分解される

$$\underbrace{\sum (y_t - \bar{y})^2}_{TSS} = \underbrace{\sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2}_{ESS} + \underbrace{\sum \hat{\varepsilon}_t^2}_{RSS}$$

TSS	ESS	RSS
総平方和	説明された平方和	残差平方和
(Total Sum of Squares)	(Explained Sum of Squares)	(Residual Sum of Squares)

決定係数

- 決定係数 R^2 : y_t の総変動（TSS）のうち説明された部分（ESS）の比率
- R^2 が1に近いほど、推定式の説明力が高い

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} \quad \left(= \frac{x_t\text{で説明可能な変動}}{y_t\text{の総変動}} \right)$$

$$= 1 - \frac{RSS}{TSS} \quad \left(= 1 - \frac{\text{説明できない変動}}{y_t\text{の総変動}} \right)$$

- x と y の相関係数 r_{xy}
  → 決定係数と相関係数の関係は

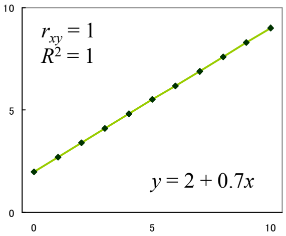
$$\boxed{R^2 = r_{xy}^2}$$ （決定係数＝相関係数の二乗）

⇒ R^2 は、相関係数と同じく、変数間の直線的関係の強さを表す

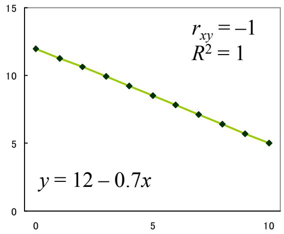
決定係数と相関係数（図示）

- 決定係数（＝相関係数の二乗）は、直線的関係の強さを表す。非線形の関係を検出する力はない。

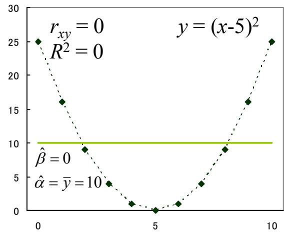
① 厳密な正の相関



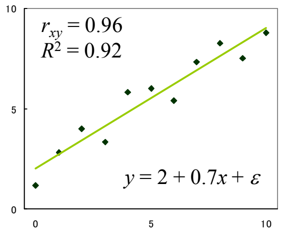
③ 厳密な負の相関



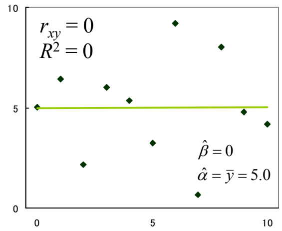
⑤ 厳密な2次の関係



② 強い正の相関

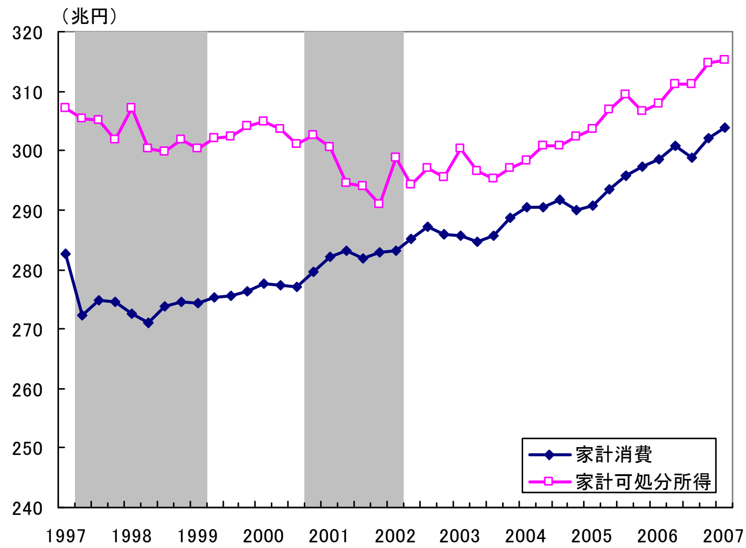


④ 完全な無相関



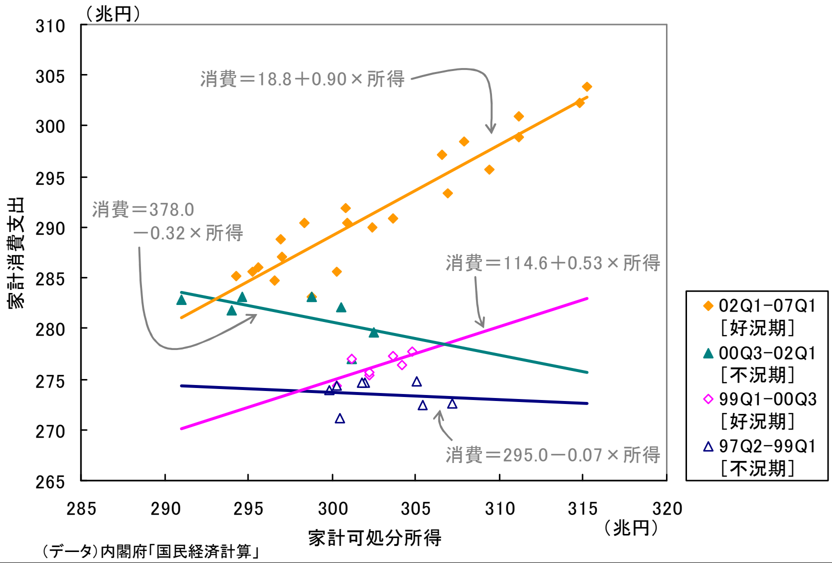
- ②では y の変動の92%が x の変動で説明されている（R^2=0.92）
- $R^2 = 0$ は、必ずしも (x, y) の間に何の関係もないことを示すわけではない。⑤では厳密な2次関係があるが $R^2 = 0$ である。
- $R^2 = 0$ の時は、$\hat{\beta} = 0, \hat{\alpha} = \bar{y}$ となる。

消費と所得の関係（短期）①



（データ）内閣府「国民経済計算」

消費と所得の関係（短期）②



（データ）内閣府「国民経済計算」

消費関数の推定結果（短期、単回帰）〈例〉

Dependent Variable: CONS
Method: Least Squares
Sample: 1999Q1 2000Q3
Included observations: 7

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	114.5953	71.18201	1.609892	0.1683
YD	0.534167	0.235194	2.271177	0.0723

R-squared	0.507789	Mean dependent var	276.2603
Adjusted R-squared	0.409347	S.D. dependent var	1.222114
S.E. of regression	0.939243	Akaike info criterion	2.947471
Sum squared resid	4.410885	Schwarz criterion	2.932017
Log likelihood	-8.316148	F-statistic	5.158246
Durbin-Watson stat	0.498492	Prob(F-statistic)	0.072332

短期と長期の推定結果の比較（単回帰）

	標本期間	基礎的消費（定数項）	限界消費性向（傾き）	決定係数	標本数
長期	65-06年度	-23.4 (-4.417) ***	0.981 (44.111) ***	0.980	42
短期	97Q2-99Q1〔不況期〕	295.0 (4.939) ***	-0.071 (-0.360)	0.021	8
	99Q1-00Q3〔好況期〕	114.6 (1.610)	0.534 (2.271) *	0.508	7
	00Q3-02Q1〔不況期〕	378.0 (6.867) ***	-0.325 (-1.755)	0.381	7
	02Q1-07Q1〔好況期〕	18.8 (0.862)	0.901 (12.486) ***	0.891	21

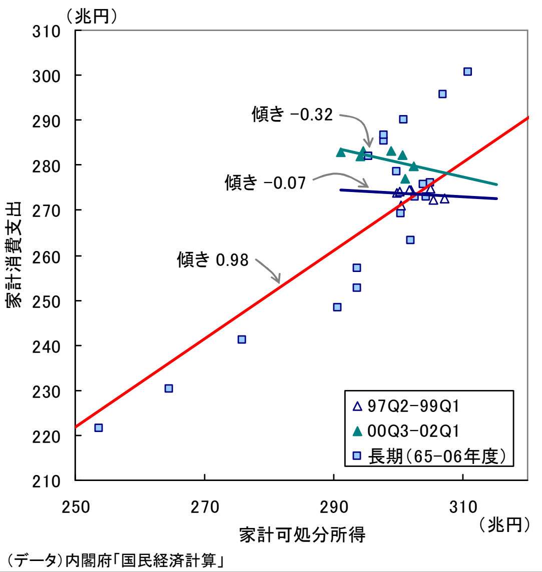
（注）カッコ内はt値。***, **, *はそれぞれ1%, 5%, 10%水準で有意。

- 不況期には、傾きの係数は、ほぼ0（または負）
- 好況期には、係数は正だが、長期の傾きよりも小さい

（参考）長期と短期の関係をともに組み込んだ推定方法・・・誤差修正モデル
（エラー・コレクション・モデル）

23

消費と所得の関係（短期vs長期）①不況期

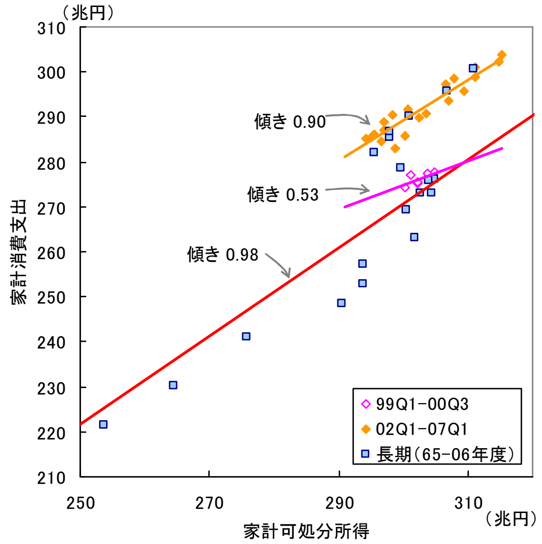


（データ）内閣府「国民経済計算」

- 習慣形成仮説？
  - 一度、生活水準が上がると、所得が下がっても、生活水準は下げられない？
- 恒常所得仮説？
  - 生涯を通じた所得の見通しが変わらなければ、景気による一時的な所得の変動があっても、消費行動は変えない？

24

消費と所得の関係（短期vs長期）②好況期



（データ）内閣府「国民経済計算」

- 習慣形成仮説？
  - 一度、生活水準が上がると、所得が下がっても、生活水準は下げられない？
- 恒常所得仮説？
  - 生涯を通じた所得の見通しが変わらなければ、景気による一時的な所得の変動があっても、消費行動は変えない？

限界消費性向と乗数効果

- ISモデル（45度線法）

(1) $Y = C + I + G + (X - M)$ ［IS方程式］

(2) $C = \alpha + \beta(Y - T)$ ［消費関数］

(2)を(1)に代入して整理

$$Y = \frac{\alpha}{1-\beta} - \frac{\beta}{1-\beta}T + \frac{1}{1-\beta}G + \frac{1}{1-\beta}\{I + (X - M)\}$$

<u>減税乗数</u>
税（T）を1兆円減らしたときにGDP（Y）が何兆円増えるか

<u>財政支出乗数</u>
財政支出（G）を1兆円増やしたときにGDP（Y）が何兆円増えるか

⇒ 限界消費性向（β）の推定値（$\hat{\beta}$）から乗数を推定

乗数の推定値（単回帰）

	標本期間	限界消費性向の推定値（$\hat{\beta}$）	支出乗数 $\left(\frac{1}{1-\hat{\beta}}\right)$	減税乗数 $\left(\frac{\hat{\beta}}{1-\hat{\beta}}\right)$
長期	65-06年度	0.981	51.75	50.75
短期	97Q2-99Q1〔不況期〕	-0.071	0.93	-0.07
	99Q1-00Q3〔好況期〕	0.534	2.15	1.15
	00Q3-02Q1〔不況期〕	-0.325	0.75	-0.25
	02Q1-07Q1〔好況期〕	0.901	10.11	9.11

50倍？！！

支出乗数は1より小？
減税乗数はマイナス？

- 短期の乗数の単純平均：支出乗数＝3.49, 減税乗数＝2.49
- 標本期間による加重平均：支出乗数＝5.58, 減税乗数=4.48

※ 乗数は長期と短期のどちらで考えるべきか？

27

最小二乗法の代数学的性質

最小二乗法により求めた $\{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\varepsilon}\}$ は、以下の性質を持つ

① 推定された回帰直線は、標本平均点 $(\bar{x}, \bar{y})$ を通る

$$\bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,\bar{x}$$

② 残差の平均はゼロ

$$\bar{\hat{\varepsilon}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \hat{\varepsilon}_t = 0$$

③ 残差は説明変数 x_t と無相関

$$\mathrm{cov}(x_t, \hat{\varepsilon}_t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum (x_t - \bar{x})\hat{\varepsilon}_t = 0$$

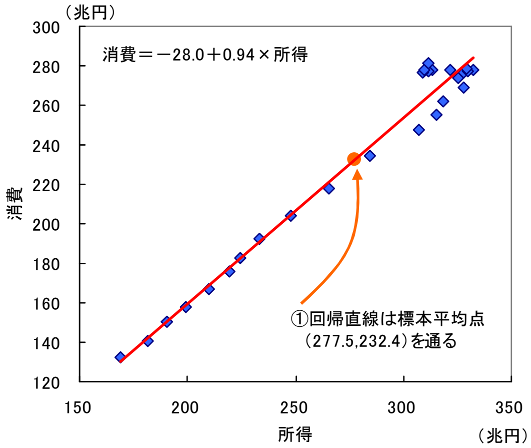
④ 残差は、y_tの推定値 $\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t$と無相関

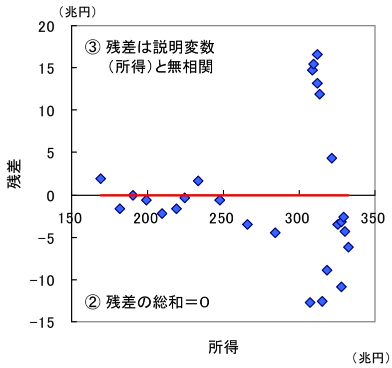
$$\mathrm{cov}(\hat{y}_t, \hat{\varepsilon}_t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum (\hat{y}_t - \bar{y})\hat{\varepsilon}_t = 0$$

注）定数項 α を含まない推定では①②は成立しない

28

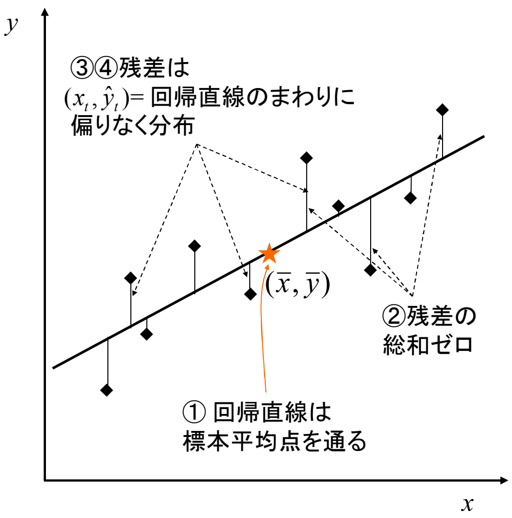
最小二乗法の代数学的性質（実例）



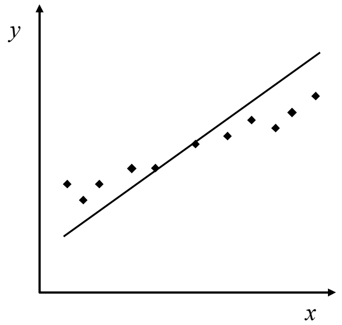


29

✍最小二乗法の代数学的性質（図示）



（参考）
残差が$(x_t, \hat{y}_t)$と負に相関
$(x_t, \hat{y}_t)$が大きいほど負の残差が出やすくなっている

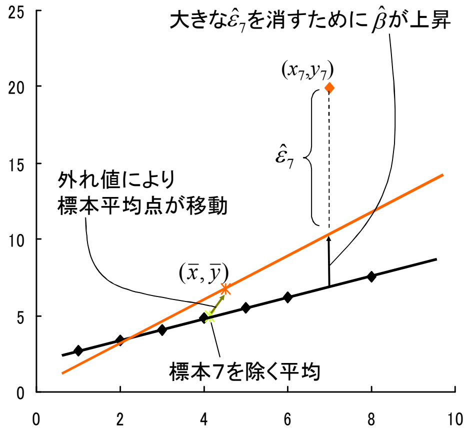


↑
最小二乗法ではこうならない

30

外れ値の影響

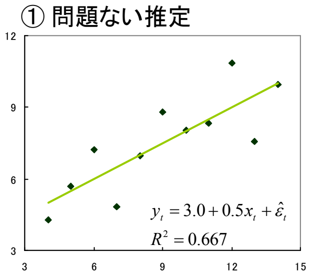
- 最小二乗法 ・・・ 外れ値（異常値）の影響が大きい推定法
  - 最小二乗法＝残差平方和 $\sum \hat{\varepsilon}_t^2$ を最小にするように $\{\hat{\alpha}, \hat{\beta}\}$ を求める
    ⇒ 著しく大きな残差があるとその影響を受けやすい



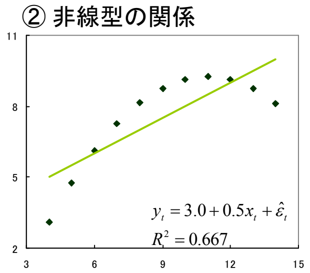
- 最小二乗法による回帰線は
  ① 標本平均点 $(\bar{x}, \bar{y})$ を通る
  ② 残差の総和ゼロ
  という性質がある
- 著しく大きな残差があると、①②の制約を満たすために、回帰線はそうした外れ値に引きずられてしまう

外れ値の影響（例）

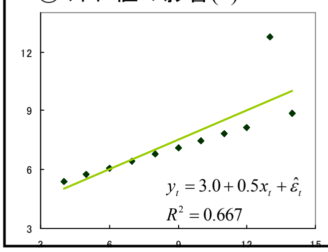
① 問題ない推定



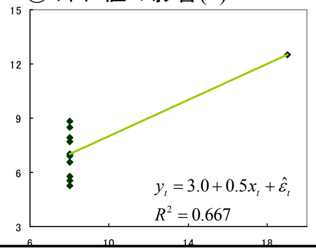
② 非線型の関係



③ 外れ値の影響(1)



④ 外れ値の影響(2)



- 右の数値例は、すべて同じ最小二乗推定量を生む

  ⇒ 推定された値だけを見ていては、誤った結論を出す可能性
- 外れ値の影響や関数形の誤りを避けるために、①データをプロットする、②残差のふるまいを調べる、③特殊な出来事が生じた期間等はサンプルから外す等が大切

外れ値の影響の除去

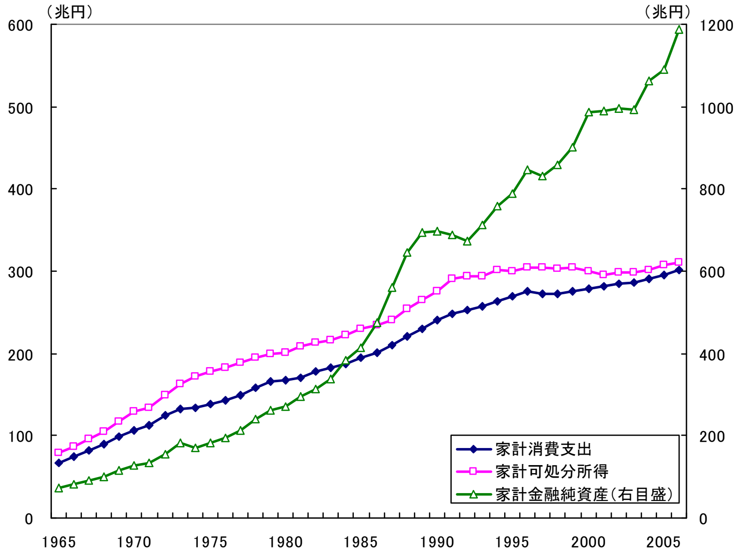
- 最小二乗法 ・・・ 外れ値（異常値）の影響が大

⇒ 外れ値（異常値）がないかどうかの検証は重要

- データを散布図等にプロットしてみる
- 残差のふるまいを検証する
- 特異な出来事が生じていた時期等はサンプルから外す
  - 物価の分析の際の消費税導入・引上げ時点のデータ
  - 銀行の分析の際の合併した銀行の合併前後のデータ　等
- データの上位・下位○%のサンプルを除外する
  - 家計別データを用いた消費・所得の分析で所得上位3%のデータを除外　等

33

消費と所得、金融資産残高の関係



（データ）内閣府「国民経済計算」、日本銀行「資金循環勘定」

34

最小二乗法（重回帰）

- 重回帰＝説明変数が2つ以上ある回帰分析

（説明変数が2つの場合）

被説明変数　定数項　係数　説明変数　残差

$$y_t = \hat{\alpha} + \underbrace{\hat{\beta}_1 x_{1t} + \hat{\beta}_2 x_{2t}}_{} + \underbrace{\hat{\varepsilon}_t}_{}$$

x_1, x_2で説明できる部分 ＝y_tの推定値（$\hat{y}$）

説明できない部分

- 最小二乗法：説明できない部分（残差）の2乗の和（残差平方和=RSS）が最小になるように係数（$\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$）を決定

35

消費関数（重回帰）

$$CONS_t = \alpha + \beta_1 YD_t + \beta_2 FA_t + \hat{\varepsilon}_t$$

↑消費　↑可処分所得　↑金融純資産残高

【解釈】

①ケインズ型消費関数（流動性制約）を、金融資産残高を考慮に入れる形に拡張

②恒常所得仮説

$$CONS_t = CONS_t(W_t, A_t)$$

生涯賃金所得の割引現在価値　金融資産残高（将来の金融所得の現在価値）

⇒ 生涯賃金所得W_t（観察不能）の代理変数として現在の可処分所得（YD_t）を使用

36

消費関数の推定結果(重回帰)①
説明変数(金融資産残高)の追加

Dependent Variable: CONS
Method: Least Squares
Sample: 1965 2006
Included observations: 42

被説明変数

Variable	Coefficient	Std.		Prob.
C	14.19788	2.287454	6.206848	0.0000
YD	0.640935	0.016		.0000
FA	0.076341	0.003		.0000

R-squared	0.998451	Mean dependent var	199.4043
Adjusted R-squared	0.998372	S.D. de	62
S.E. of regression	2.908973	Aka	27
Sum squared resid	330.0229	Schwar	46
Log likelihood	-102.8868	F-statist	08
Durbin-Watson stat	0.748616	Prob(F-statistic)	0.000000

説明変数

推定された係数の値
※ 単回帰の推定値と比較

決定係数
※ 単回帰の結果と比較

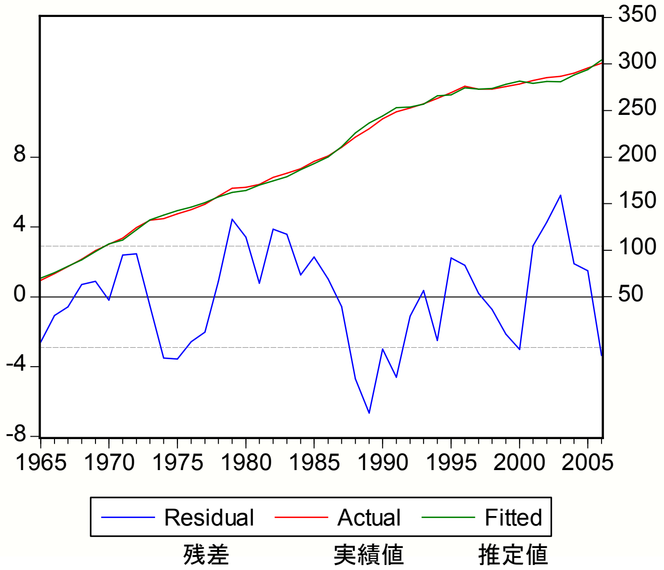
自由度修正済決定係数
(説明変数の数を考慮に入れた決定係数)
※ 単回帰の結果と比較

消費関数の推定結果(重回帰) ②
回帰式

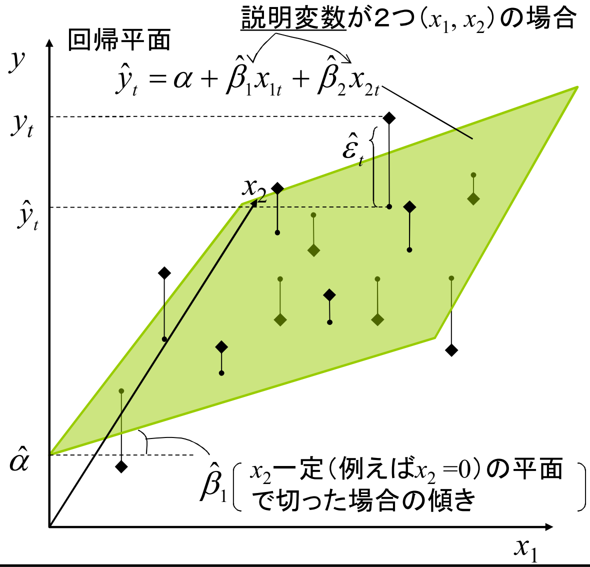
$$\underbrace{CONS_t}_{\text{被説明変数(消費)〈実績値〉}} = \underbrace{\underbrace{14.2}_{\text{定数項}} + \underbrace{0.64}_{\text{係数①}} \times \underbrace{YD_t}_{\text{説明変数①(所得)}} + \underbrace{0.08}_{\text{係数②}} \times \underbrace{FA_t}_{\text{説明変数②(金融資産)}}}_{\text{回帰式で説明できる部分〈推定値〉} = \widehat{CONS}_t} + \underbrace{\hat{\varepsilon}_t}_{\text{残差 説明できない部分}}$$

- 基礎的消費: 所得、金融資産が 0 でも最低限 [ ] 兆円の消費
- 限界消費性向: 所得が1万円増えると消費は [ ] 万円増加
- 金融資産残高が100万円増えると、年間消費額は [ ] 万円増加

消費関数の推定結果（重回帰）③ 実績値，推定値，残差



最小二乗法の考え方（重回帰の場合）



◎ 基本的な考え方は単回帰の場合と同じ

- 回帰平面を標本のなるべく「近く」に通す
- 「近く」を観測点の y 軸方向の距離（=残差）で測る
- 数学的に扱いやすいように残差の2乗の和（残差平方和）を最小にする
  ⇒ 最小二乗法

最小二乗法（重回帰）

- 説明できない部分（＝残差）の2乗の総和（残差平方和 RSS）を最小化するように係数（$\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$）を求める

$$\underset{\hat{\alpha},\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2}{\text{Min}} \sum \hat{\varepsilon}_t^2$$

残差の2乗の総和

- 最小化の一階条件　⇒ 3本の方程式

$$\frac{\partial \sum \hat{\varepsilon}_t^2}{\partial \hat{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial \sum \hat{\varepsilon}_t^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0, \quad \frac{\partial \sum \hat{\varepsilon}_t^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 0$$

- 3本の方程式、3個の未知数（$\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$）
⇒ 方程式を解いて（$\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$）を求める

41

重回帰係数の意味

- 重回帰分析の係数・・・他の説明変数の影響を除いた上で、当該説明変数が被説明変数に及ぼす影響を示す
- 他の説明変数を一定としたまま、その説明変数だけが変化した場合の影響を示す＝偏微分係数

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1t} + \hat{\beta}_2 x_{2t} + \hat{\varepsilon}_t$$

x_2がyに与える影響を除いた上でx_1がyに与える影響
＝x_2が一定のままx_1だけ変化した場合のyへの影響

x_1が一定のままx_2だけ変化した場合のyへの影響

42

消費関数の推定結果（重回帰）④ 単回帰との比較

（単回帰の結果）

$$CONS_t = -23.4 + \underline{0.98} \times YD_t + \hat{\varepsilon}_t$$

所得（YD）が1単位変化した場合の消費の変化（＝限界消費性向）

（重回帰の結果）

$$CONS_t = 14.2 + \underline{0.64} \times YD_t + \underline{0.08} \times FA_t + \hat{\varepsilon}_t$$

金融資産（FA）を一定としたまま所得（YD）だけ変化した場合の消費の変化（＝金融資産の影響を考慮した上での限界消費性向）

所得（YD）を一定としたまま金融資産（FA）だけ変化した場合の消費の変化

自由度修正済決定係数

- 決定係数 R^2 は、説明変数を追加するごとに必ず増大する（本来関係ないような変数を追加しても必ず増大する）
- このため、説明変数の数が異なるモデルの説明力を比較するには、「自由度修正済み決定係数 $\bar{R}^2$」が用いられる

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/\overbrace{(T-k)}^{RSS\text{の自由度}}}{TSS/\underbrace{(T-1)}_{TSS\text{の自由度}}}$$

⇒説明変数の数 k（定数項を含む）を増やしたとき、自由度の低下を補うだけの残差平方和 RSS の減少がなければ、$\bar{R}^2$は低下する

※.このほか、説明変数の数が異なるモデルの選択基準として良く用いられるものとして、赤池情報量基準（AIC）とシュワルツ基準（SC）がある

$$AIC = \ln\frac{RSS}{T} + \frac{2k}{T} \qquad SC = \ln\frac{RSS}{T} + \frac{k}{T}\ln T$$

これらは値が小さいほど良く、いずれも説明変数の増加にペナルティーを課している

消費関数の推定結果（重回帰）⑤
自由度修正済決定係数等：当てはまりの良さ

Dependent Variable: CONS
Method: Least Squares
Sample: 1965 2006
Included observations: 42

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
	14.19788	2.287454	6.206848	0.0000
	0.640935	0.016896	37.93504	0.0000
	0.076341	0.	7	0.0000

R-squared	0.998451	Mean dependent va	199.4043
Adjusted R-squared	0.998372	S.D. dependent var	72.09462
	2.908973	Akaike info criterion	5.042227
	330.0229	Schwarz criterion	5.166346
	-102.8868	F-statist	12572.08
Durbin-Watson stat	0.748616	Prob(F-s	0.000000

決定係数＝0.9985
※ 単回帰の結果と比較

自由度修正済決定係数
= 0.9984
※ 単回帰の結果と比較

赤池情報量基準

シュワルツ基準

45

消費関数の推定結果（重回帰）⑥
説明変数の追加（紅白視聴率、巨人勝率）

Dependent Variable: CONS
Method: Least Squares
Sample: 1965 2006
Included observations: 42

Variable	Coefficient		tic	Prob.
C	9.060189	.28467		
YD	0.639718	0.017786		
FA	0.079988	0.004898	16.33218	0.0000
KOHAKU	0.122063	0.1 3881	0.98532	
GIANTS	-0.069610	0.075077	-0.92718	

	0.998522	Mean dependent var	
ed	0.998362	S.D. dependent var	72. 9462
S.E. of regression	2.917	Akaike info criterion	5.090689
Sum squ		rz criterion	5.297555
Log likeli		stic	6249.700
Durbin-W		F-statistic)	0.000000

紅白視聴率の係数

巨人軍勝率の係数

赤池情報量基準、シュワルツ基準とも増加＝説明変数追加は不適切

説明変数を増やすと
決定係数は必ず増加

自由度修正済決定係数は低下
⇒ 説明力は低下と判断

46

「自由度」の意味

☆ 自由度＝全体の標本数(T)から、標本に課されている制約の数を除いたもの(自由な標本の数)

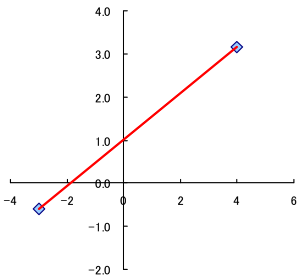
- 単回帰の自由度
  - 回帰直線を決定するためには、最低2個の標本が必要
    ⇒自由に動ける標本は$T-2$個
- 重回帰の自由度
  (説明変数が3つ(定数項含む)の場合)
  - 回帰平面を決定するためには、最低3個の標本が必要
    ⇒自由に動ける標本は$T-3$個

  (説明変数がk個(定数項含む)の場合)
  - 回帰式を決定するためには、k本の正規方程式が必要
    ＝最低k個の標本が必要
    ⇒自由に動ける標本は$T-k$個

47

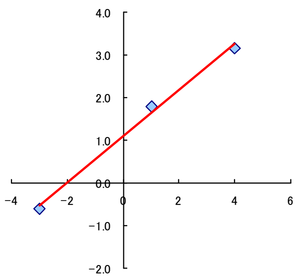
自由度の意味(図示)

標本数＝2の場合



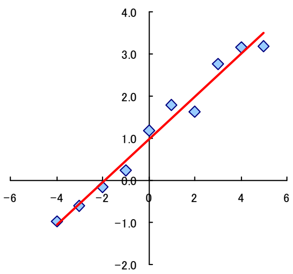
直線を決定するのに最低2個の標本が必要
＝回帰直線は必ず2個の標本上を通るように決定
⇒直線は自由に動く余地なし
(自由度＝0)

標本数＝3の場合



直線の決定に最低必要な標本数(2個)よりも1個余分な(自由な)標本を利用
⇒標本1個分だけ直線は自由に動く余地
(自由度＝1)

標本数＝10の場合



直線の決定に最低必要な標本数(2個)よりも8個余分な(自由な)標本を利用
⇒標本8個分だけ直線は自由に動く余地
(自由度＝8)

☆ 自由度が大きい＝最低必要な標本数よりも多くの標本の情報を用いて推定
⇒推定精度が高くなる

48

消費関数の推定結果（重回帰）⑦
t値とp値：説明変数の有意性の判断

Dependent Variable: CONS
Method: Least Squares
Sample: 1965
Included obse

係数の推定値の標準誤差

t値＝係数/標準誤差
t値が概ね2以上であれば5%水準で有意と判断

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	9.060189	11.28467	0.802876	0.4272
YD	0.639718	0.017786	35.96782	0.0000
FA	0.079988	0.004898	16.33218	0.0000
KOHAKU	0.122063	0.123881	0.985324	0.3309
GIANTS	-0.069610	0.075077	-0.927180	0.3598

t値、p値で判断すると、消費の動きに対して、
・所得、金融資産は有意（意味がある）
・紅白、巨人は有意でない（意味が無い）
⇒ 紅白、巨人は説明変数として採用しない

p値＝係数が意味がない確率
⇒ 小さければ有意と判断
※ 判断基準：1%, <u>5%</u>, 10%等

Prob(F-statistic) 0.000000

49

説明変数の選択

- 説明変数の選択は重要な問題
  - 必要な説明変数が含まれない・・・係数の値を誤って推定（ex. 金融資産を含める/含めない場合の所得の係数）
  - 不要な説明変数が含まれる・・・自由度の減少 → 推定の精度が低下
- 説明変数の選択方法
  - 自由度修正済決定係数、赤池情報量基準等による選択
    - 自由度修正済決定係数が高まれば採用、低下すれば不採用
    - 赤池情報量基準（またはシュワルツ基準）が低下すれば採用
  - t値、p値による選択
    - t値（の絶対値）が概ね2以上であれば採用、以下ならば不採用
    - p値が小さければ採用（ex. 5%以下（1%,10%等も））

50

消費関数の推定結果(短期、重回帰)〈例〉

Dependent Variable: CONS
Method: Least Squares
Sample: 1999Q1 2000Q3
Included observations: 7

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	183.5107	19.57401	9.375223	0.0007
YD	0.233608	0.068518	3.409422	0.0270
FA	0.023215	0.002677	8.670526	0.0010

R-squared	0.975134	Mean dependent var	276.2603
Adjusted R-squared	0.962701	S.D. dependent var	1.222114
S.E. of regression	0.236026	Akaike info criterion	0.247781
Sum squared resid	0.222834	Schwarz criterion	0.224599
Log likelihood	2.132768	F-statistic	78.43099
Durbin-Watson stat	2.661624	Prob(F-statistic)	0.000618

短期と長期の推定結果の比較(重回帰)

	標本期間	定数項(基礎的消費)	可処分所得(限界消費性向)	金融資産残高	自由度修正済決定係数	標本数
長期	65-06年度	14.2 (6.207) ***	0.641 (37.935) ***	0.076 (21.640) ***	0.998	42
短期	97Q2-99Q1 〔不況期〕	242.0 (2.600) **	0.025 (0.104)	0.028 (0.763)	-0.227	8
	99Q1-00Q3 〔好況期〕	183.5 (9.375) ***	0.234 (3.409) **	0.023 (8.671) ***	0.963	7
	00Q3-02Q1 〔不況期〕	354.5 (4.511) **	-0.367 (-1.659)	0.036 (0.464)	0.119	7
	02Q1-07Q1 〔好況期〕	163.7 (6.180) ***	0.185 (1.515)	0.066 (6.226) ***	0.962	21

(注) カッコ内はt値。***, **, *はそれぞれ1%, 5%, 10%水準で有意。

- 不況期には、限界消費性向の係数は、ほぼ0(または負)〔決定係数は低く、係数も有意ではない〕
- 好況期には、係数は正だが、長期の係数よりも小さい
- 金融資産残高の係数は、短期と長期で顕著な差はない

(参考) 長期と短期の関係をともに組み込んだ推定方法・・・誤差修正モデル(エラー・コレクション・モデル)

乗数の推定値(単回帰)

	標本期間	限界消費性向の推定値($\hat{\beta}_1$)	支出乗数 $\frac{1}{1-\hat{\beta}_1}$	減税乗数 $\frac{\hat{\beta}_1}{1-\hat{\beta}_1}$
長期	65-06年度	0.641	2.79	1.79
短期	97Q2-99Q1〔不況期〕	0.025	1.03	0.03
	99Q1-00Q3〔好況期〕	0.234	1.30	0.30
	00Q3-02Q1〔不況期〕	−0.367	0.73	−0.27
	02Q1-07Q1〔好況期〕	0.185	1.23	0.23

- 短期の乗数の単純平均: 支出乗数＝1.07, 減税乗数＝0.07
- 標本期間による加重平均: 支出乗数＝1.12, 減税乗数=0.12

※ 乗数は長期と短期のどちらで考えるべきか？

53

回帰分析の推定結果に基づく要因分解(実額)

- 実績値の要因分解

$$\underline{CONS_t} = \underline{14.2} + \underline{0.64 \times YD_t} + \underline{0.08 \times FA_t} + \hat{\varepsilon}_t$$

実績値　定数項要因(基礎的消費)　所得要因　金融資産要因　その他要因(残差要因)

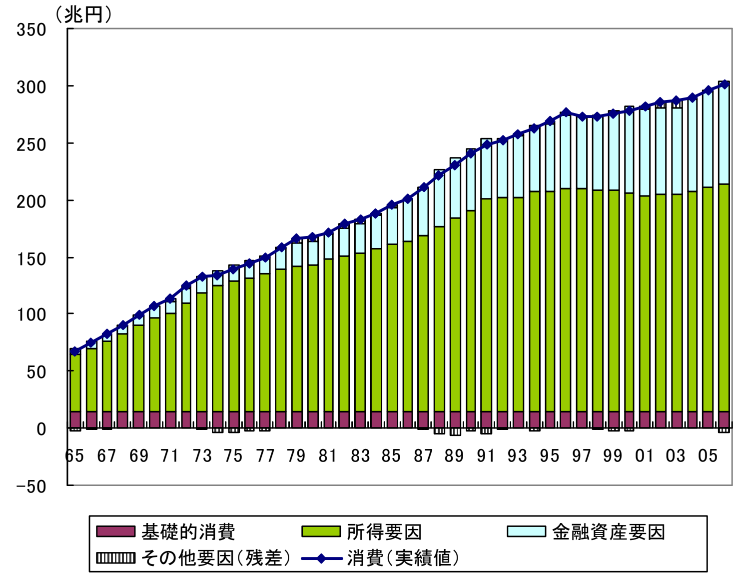
- 推定値の要因分解

$$\underline{\widehat{CONS}_t} = \underline{14.2} + \underline{0.64 \times YD_t} + \underline{0.08 \times FA_t}$$

実績値　定数項要因(基礎的消費)　所得要因　金融資産要因

54

推定結果に基づく消費の要因分解（実額）



回帰分析の推定結果に基づく要因分解（変化率）

■ 実績値の変化率の要因分解

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1t} + \hat{\beta}_2 x_{2t} + \hat{\varepsilon}_t$$

$$-)\ y_{t-1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1t-1} + \hat{\beta}_2 x_{2t-1} + \hat{\varepsilon}_{t-1}$$

$$\Delta y_t = \hat{\beta}_1 \Delta x_{1t} + \hat{\beta}_2 \Delta x_{2t} + \Delta \hat{\varepsilon}_t$$

両辺をy_{t-1}で割って

$$\boxed{\frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} = \beta_1 \frac{\Delta x_{1t}}{y_{t-1}} + \beta_2 \frac{\Delta x_{2t}}{y_{t-1}} + \frac{\Delta \varepsilon_t}{y_{t-1}}}$$

実績値 y_t 変化率　x_{1t}要因　x_{2t}要因　残差要因

■ 推定値の変化率の要因分解

推定値：

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1t} + \hat{\beta}_2 x_{2t}$$

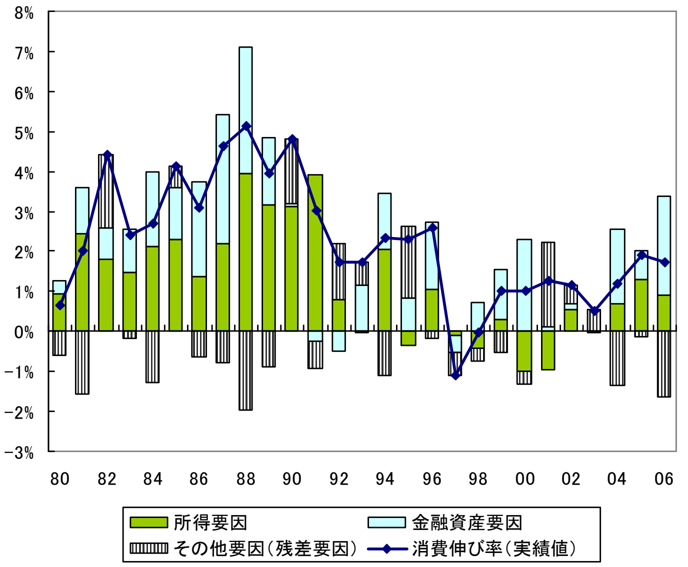
左と同様に変形して

$$\boxed{\frac{\Delta \hat{y}_t}{\hat{y}_{t-1}} = \hat{\beta}_1 \frac{\Delta x_{1t}}{\hat{y}_{t-1}} + \hat{\beta}_2 \frac{\Delta x_{2t}}{\hat{y}_{t-1}}}$$

推定値$\hat{y}_t$変化率　x_{1t}要因　x_{2t}要因

※分母が実績値y_{t-1}ではなく推定値$\hat{y}_{t-1}$で割ることに注意

推定結果に基づく消費の要因分解（変化率）



57

消費関数の推定結果（重回帰）⑧ その他の診断統計量(1)

Dependent Variable: CONS
Method: Least Squares

回帰の標準誤差：
回帰式の誤差の標準偏差
※ 小さい方が精度の高い推定、予測の精度を測る際などに使用

残差平方和
※ 最小二乗法はこれが最小になるように係数を推定する

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	14.19788	2.2874[illegible]	6.206848	0.0000
YD	0.640935	0.016[illegible]	[illegible]	[illegible]
FA	0.076341	0.0[illegible]28	[illegible]	[illegible]

対数尤度
※ 想定した回帰モデルから見て実際の標本がどの程度もっともらしいか（大きい方が良い）

R-squared	0.998451	Mean dependent var	[illegible]
Adjusted R-squared	0.998372	S.D. dependent var	72.09462
S.E. of regression	2.908973	Akaike info criterion	5.042227
Sum squared resid	330.0229	Schwarz criterion	[illegible]
Log likelihood	-102.8868	F-statistic	[illegible]
Durbin-Watson stat	0.748616	Prob(F-statistic)	[illegible]

ダービン・ワトソン比
※ 撹乱項に系列相関があるかどうか（2に近ければ良い）

58

消費関数の推定結果（重回帰）⑨
その他の診断統計量(2)

Dependent Variable: CONS
Method: Least Squares
Sample: 1965 2006
Included observations: 42

	Coefficie[illegible]	[illegible]	[illegible]atistic	[illegible]b.
C	14.19788	2.287454	[illegible].206848	[illegible]0000
YD	0.640935	0.016896	[illegible]93504	[illegible]0000
FA	0.076341	0.003528	2[illegible]3967	[illegible].0000

R-squared	[illegible]998451	Mean dependent var	199.4043
Adjusted R-squared	0.9[illegible]8372	S.D. dependent var	72.09462
[illegible]	2.908[illegible]73	Akaike info criterion	5.042227
[illegible]	330.0229	Schwarz criterion	5.166346
[illegible]	[illegible]02.8868	F-statistic	12572.08
Durbin-Watson stat	0.748616	Prob(F-statistic)	0.000000

F値：
意味のある回帰式かどうか（係数が全てゼロかどうか）の検定統計量

被説明変数（消費）の平均値

被説明変数の標準偏差

F検定に基づくp値：
回帰式が無意味（全ての係数がゼロ）である確率

59

消費関数（分析結果のまとめ）

- ケインズ型（流動性制約型）消費関数を、長期と短期で推定すると、短期の方が限界消費性向が低い ･･･ 習慣形成仮説？ 恒常所得仮説？
- 家計の金融資産残高を説明変数に含めると、短期・長期ともに限界消費性向は低下
- 金融資産残高を考慮したうえでの短期の財政支出乗数（45度線法）は概ね1.0～1.3
  （参考）内閣府「短期日本経済マクロ計量モデル（2005年版）」の乗数：
  1年目1.12，2年目0.99，3年目0.76
- 推定結果に基づき消費の伸び率を要因分解すると、バブル期は所得要因、金融資産要因とも大きな寄与･･･所得と金融資産残高の高い伸びが4％前後の消費の伸びをもたらす
- 90年代以降は、主に所得の伸びが低下したことが、消費低迷の要因

60