

微分っていったい何なのさ

ミクロ経済学では、必ずといっていいほど「微分」が出てきます。数学は嫌いだという気持ちは良く分かるのですが(私もそうですから)、微分とケンカをしてもいいことは何もありません。微分は「頭で考えるものではなく、体で覚えるもの」と割り切って、できるだけ早いうちにマスターしてしまいましょう。

§ . 例えばこんなときに微分を使う

ゆーちょこぼ自動車(株)のガーン社長は、昨年発売した小型自動車「チーマ」の売れ行きが良いため、チーマの増産を検討しています。ゆーちょこぼ自動車は営利企業ですから、チーマの増産が利益に貢献しなければなりません。そこで、ガーン社長はチーマの増産と利潤(経済学では「利益」という言葉は使いません。また、「利益」と「利潤」は指し示す範囲が違います)の関係を計算することにしました。

ガーン社長の調査によると、ゆーちょこぼ自動車の利潤(π)は、ある式で表されることが分かりました。チーマの生産台数を Y (万台)で表すことにすると、ゆーちょこぼ自動車の利潤は、

$$\pi = 100Y - (2Y^2 + 20Y + 200)$$

となります。ちなみに、 $100Y$ の部分は総収入(チーマは定価100万円なので $100 \times$ 生産台数)、カッコの中は総費用になっています。詳しくは生産者行動の理論で勉強しましょう。この式をもう少しまとめると、

$$\pi = -2Y^2 + 80Y - 200$$

となります。カッコをはずすときには、「-」の符号に注意が必要です。

さて、現在、チーマの生産台数は6です($Y=6$)。増産ということは、生産台数を増やすことです。ガーン社長が知りたいことは「 Y (生産量)が増えると π (利潤)は一体どうなるのか」ということとなります。 Y を増やすといってもいくつ増やしたらいいのか分からないので、とりあえず「 Y を1だけ増やす」方法が一般的です。そうすると、ガーン社長は「 Y を1増やすと、 π はどう変化するか」を調べていることとなります。

復習問題(8ページ)の答え

(1) y (2) 傾き (3) ゼロ (4) $2y+2x$ (5) $2x - 6y - 15$

これは「**を1増やすと、××はどうなるか**」という文章になっています。微分という計算は、この問題を解くときに使われます。

微分の式は、

$$\frac{d \times \times}{d}$$

のように記述します。 d は (differential: 微分) の頭文字です。この式は、「××を で微分する」という記号です。この式は2つに分解することもできますが、今は全部で1つの記号だとしておきましょう。つまり、 d とか横線とかに分解するのではなく、 $\frac{d \times \times}{d}$ で1つの記号とします。

ガーン社長が知りたいのは、「 Y を1増やすと、 π はどう変化するか」なので、微分の記号は

$$\frac{d\pi}{dY}$$

となります。

§ . 微分の計算方法

微分の基本公式は、

$$\frac{dax^n}{dx} = anx^{n-1}$$

です。 $\frac{d}{dx}$ の部分は、 x で微分するという意味です。つまり、左側全体で「 ax^n を x で微分する」という意味になっています。= の右側は、微分をした後の答えです。計算の仕方を詳しく見てみましょう。まず、 x で微分する問題では、 x 以外の文字は全て数字と同じ物とみなします。 ax^n は $a \times x^n$ という意味ですが、この a は数字の3や20などと同じ物として考えます（逆に a で微分するときには、 x^n を数字として考えます）。

まず、計算の第1手順は、 x の右肩の数字に注目することです。この問題の場合は、右肩の数字が n になっています。これを、前にもってきて掛け算にします。そうすると、もとも x の右肩にあった n がなくなってしまいます。

$$a \times x^n \longrightarrow a \times n \times x$$

そこで次に、 x の右肩に数字をつけますが、前と同じ数字ではまずいので、「1を引いた数字」をつけてやることにします。この問題では、 n から1を引いた $n-1$ をつけます。

$$a \times n \times x \longrightarrow a \times n \times x^{n-1}$$

これで計算はおしまいです。余計な「 \times ：掛ける」を取っておきましょう。

$$a \times n \times x^{n-1} \longrightarrow anx^{n-1}$$

主な微分の計算を見ておきましょう。

$$\frac{d(4x)}{dx} = 4 \qquad \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \frac{d(ax^3)}{dx} = 3ax^2$$

$$\frac{d\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \qquad \frac{d(ax^2 + b)}{dx} = 2ax \qquad \frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

(注) 上段真中は分数ではなく、微分の式であることに注意。 x を x で微分すると1になる。下段真中のように、 x が入っていない項は微分すると消える。

§ . ガーン社長の計算は . . .

それでは、早速計算してみましょう。ガーン社長が求めたいのは、「 Y を 1 増やすと、 π はどう変化するか」でした。計算式は、

$$\frac{d\pi}{dY} = \frac{d(-2Y^2 + 80Y - 200)}{dY}$$

となります。早速微分してみてください。答えはでましたか。

微分の計算結果に、 Y が入っていますね。まだこの段階では、はっきりとした数字が分かりません。「それでは意味がないじゃないか」といわれそうですが、実は、 Y が入っていることに意味があります。

ここで、ガーン社長の調査を思い出しましょう。現在 $Y=6$ の生産を行っているゆーちょこぼ自動車が、生産量を 1 増やすと利潤はどれくらい変化するのか、これを計算するために、微分を持ち出しています。あとで計算してみましょう。さて、では、生産量を 8 から 9 にするとどうなるのでしょうか、それでは 10 から 11 は？

このように、いろいろなケースで計算を行うことをシミュレーションといますが、微分の計算はシミュレーションに向いています。微分の計算結果に Y が残っているので、この Y に、6 や 8、10 を代入すれば利潤がどのように変化するのかが簡単に計算できます。

Y にはいろいろ代入できる

$$\frac{d(-2Y^2 + 80Y - 200)}{dY} = -4Y + 80$$

さっそく調べてみましょう。

「テーマ」生産台数 (Y) と利潤

| | | | | | | | |
|------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 生産台数 | 0 | 6 | 8 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 利潤変化 | 80 | 56 | 48 | 40 | 20 | 0 | - 20 |
| 利潤額 | - 200 | 208 | 312 | 400 | 550 | 600 | 550 |

利潤変化は、微分した後の式 $-4Y+80$ から計算しています。利潤額は、微分する前の式 $-2Y^2 + 80Y - 200$ から計算しています。2つの違いに注意しましょう。

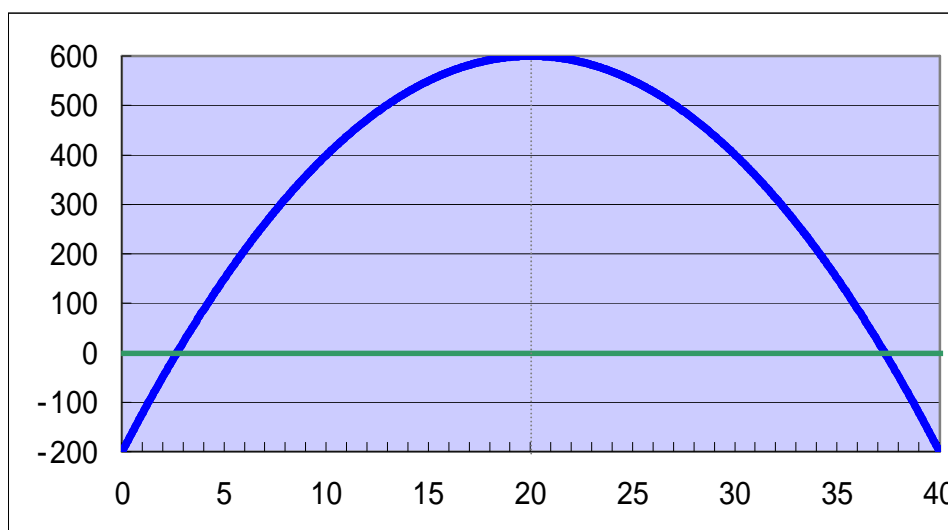
さて、ゆーちょこぼ自動車の生産量 (Y) は 6 なので、表の「6」の部分を見ます。利潤変化は 56 になっていますね。つまり、今、生産量を増やすと、利潤は 56 増えるということが分かります。また、現在の利潤額は 208 であることも分かります (Y を 1 増やすと、利潤は 208 から 56 増えて 264 になる)。生産量をふやすと利潤が増えるので、チームは増産した方がいいことが分かります。ガーン社長、自信を持ってチームを増産しましょう！

他のところではどうでしょうか、この表では、生産量が 20 になるまでは利潤が増え続けています。生産量が 20 になると、増産はかえって利潤を減らすようです。生産を増やすためには、より広い工場や多くの従業員が必要になってきます。人が増えると管理職も増えますし、工場が広くなると部品の移動も大変です。かえってコストがかかるようになるでしょう。もちろん、利潤の式は企業によって違うので、他の企業はもっと増産してもいいかもしれません。

§ . それでは何台作ると利潤は最大？

生産量が 6 の時には、増産をした方がいいことが分かりました。それでは、利潤が最大になる生産量は何台なのでしょう。利潤の式、 $\pi = -2Y^2 + 80Y - 200$ をグラフに描いたのが下の図です。

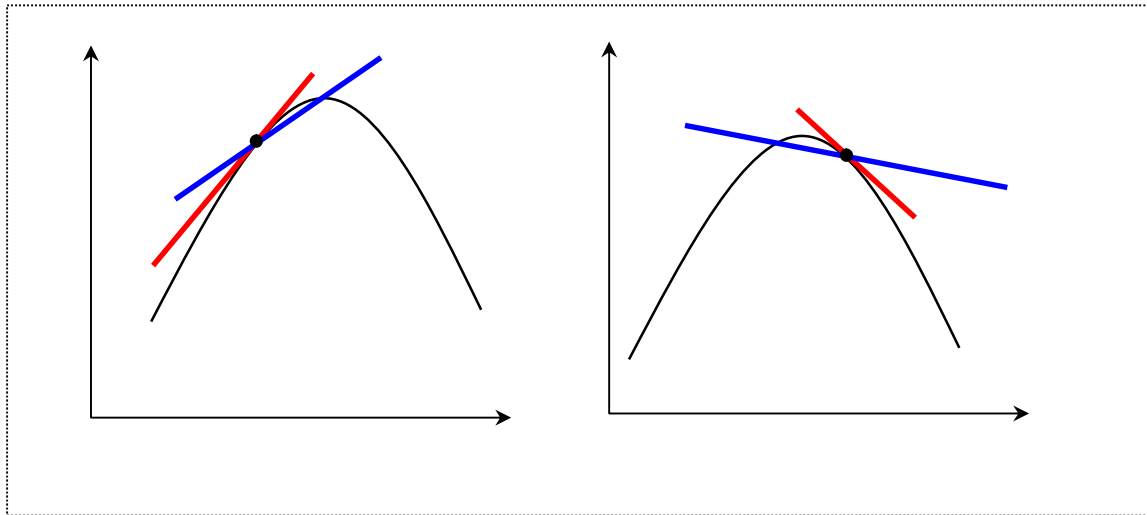
ゆーちょこぼ自動車の「チーム」生産量と利潤の関係



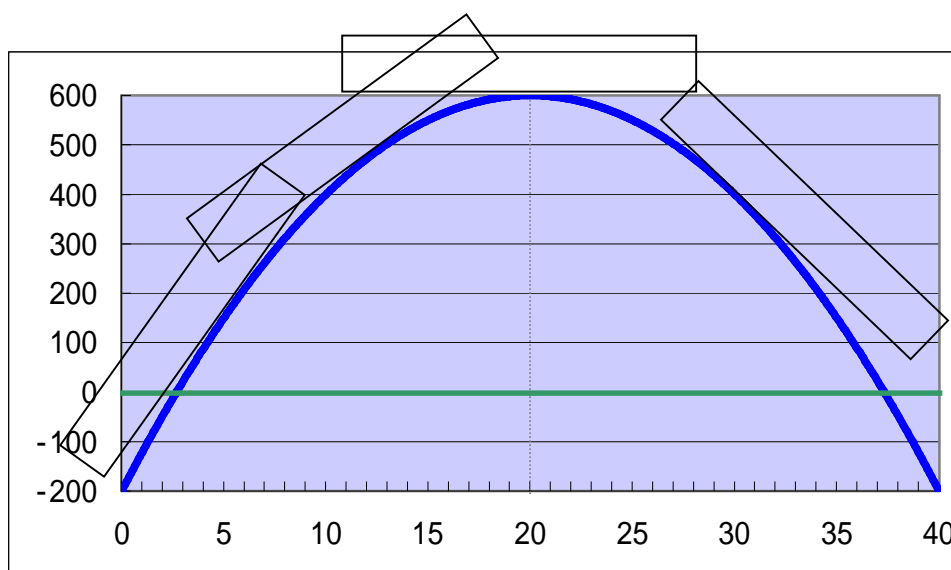
どうやら、生産量は 20 のときに利潤が最大になりそうです。しかし、経済学の世界では、生産量は 19.6 でもいいし、 $\sqrt{422} \approx 20.54$ でも構いません。本当にぴったり 20 で利潤が最大になるのでしょうか。

この計算も、微分を使うとうまくいきます。微分はグラフでいうと、「接線の傾きを求める」事を意味します。接線とは、元のグラフとぴったりくっつく直線のことをいいます。ちょっとでも交わると、接線とはいいません。

接線と交線（赤が接線，青は交線）



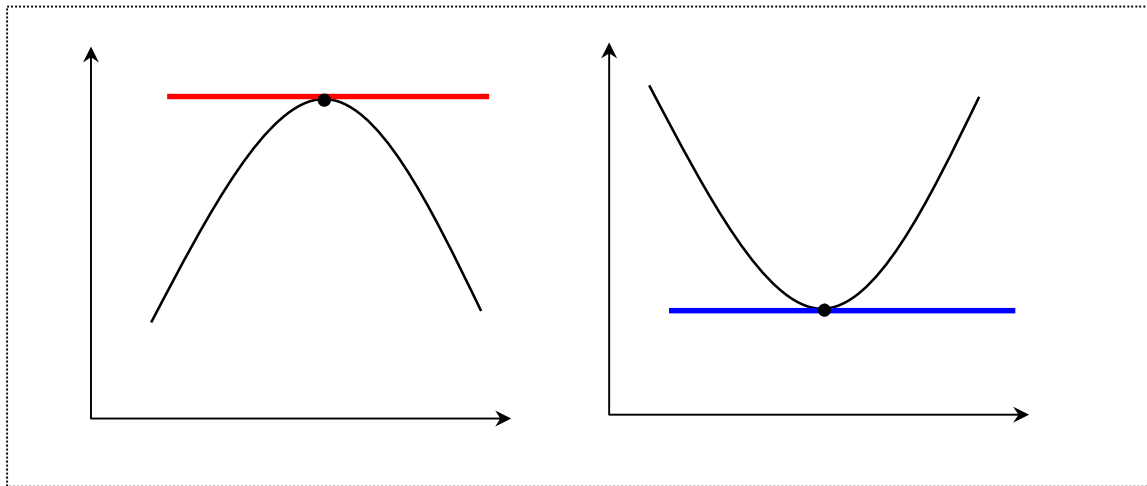
利潤のグラフでの接線の傾きは、利潤の変化を表しています。つまり、 $Y=6$ の接線の傾きは 56 になります。接線が右上がり（上の図の左）のときは、接線の傾きの値はプラスになります。右下がり（上の図の右）では、マイナスになります。これがそのまま利潤変化になります。ゆーちょぼ自動車では、チームを増産すると、最初はどんどん利潤が増えますが、途中で利潤は減少に転じる事が分かります。定規を下のグラフに当てて、接線を作ってみてください。グラフに沿って定規を右に動かすと、角度が次第に緩やかになり、さらには右下がりになります。



接線が右上がりであれば、増産（生産量が1増えると）によって利潤は増えます。右下がりであれば、増産によって利潤が減ります。それでは、利潤が最大になるとき、接線はどのような形をしているのでしょうか。

下のグラフを見てください。このグラフの山の頂点で接線を引くとどのような線になりますか？答えは水平な線です。山の頂点だけでなく、谷底でも接線は水平になります。

最大（極大）と最小（極小）



（注）最大と極大は意味が少し違いますが、ここでは同じ物として考えます。

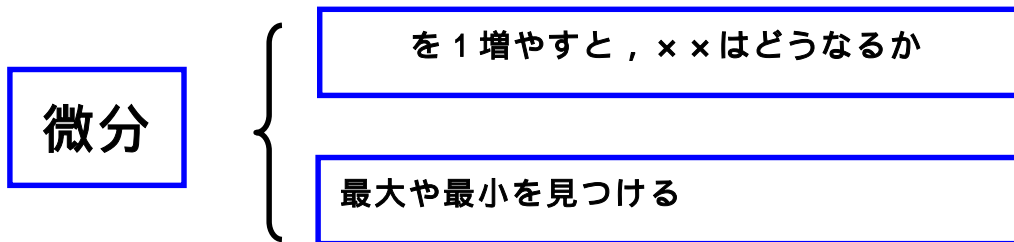
接線が水平の時には、傾きを測ることができません。つまり、傾きはゼロです。これを利用して、最大や最小を微分の計算から求めることができます。

ゆーちょぼ自動車の利潤の式は、 $\pi = -2Y^2 + 80Y - 200$ です。これを生産量で微分すると、 $\frac{d\pi}{dY} = -4Y + 80$ でした。これが接線の傾きです。利潤が最大になるところでは、接線の傾きがゼロになるので、 $-4Y + 80 = 0$ となります。これを解くと、 $Y = 20$ となります。つまり、ゆーちょぼ自動車では、チームの生産量を 20 にすると利潤が最大になります。このときの利潤は、 $\pi = -2Y^2 + 80Y - 200 = -2 \times 20^2 + 80 \times 20 - 200 = 600$ となります。

§ . まとめ

微分の利用法は 2 つあることが分かりました。1 つ目は、「 π を 1 増やすと、 π はどうなるか」を知るために使います。ガーン社長は、チームの生産（ Y ）を 1 増やすと利潤（ π ）はどのように変化するか、という計算で使いました。2 つ目の方法は、「最大・最小になるのはそのようなときか」を知るために使います。微分を使うと、チームを何台生産したら利潤は最大となるのかが分かります。

経済学の世界では、微分を使う場面がたくさんあります。パンの消費量を増やすと効用はどのくらい増加するか、税率を引き上げると税金はどの程度変化するか、政府支出を減らすと国民所得はどの程度減少するか、為替レートが減価すると経常収支はどのように変化するか、など様々な場面で微分を用います。微分は慣れてしまうと、なんでもない計算です。何度も計算練習をして慣れていきましょう。



§ . 復習問題

- (1) $\frac{dU(x, y)}{dy}$ は, $U(x, y)$ を () で微分するという意味である .
- (2) 微分は接線の () を求める計算である .
- (3) 最大, 最小の時には接線の傾きは () になる .
- (4) $U = U(x, y) = 2xy + x^2 - 3y^2 - 15y + 40$ を x で微分すると () になる .
- (5) $U = U(x, y) = 2xy + x^2 - 3y^2 - 15y + 40$ を y で微分すると () になる .

* 式に x と y のように 2 種類以上の文字が入っているときの微分を「偏微分」という .
偏微分の記号は $\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}$ のように記述するが, 計算方法は普通の微分と同じになる .